Université Claude Bernard
L3 Math Eco Probabilités 5

Mathématiques
2018-2019

Contrôle continu
Mercredi 19 mars 2019

Durée : 1H30

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin de **JUSTIFIER** les réponses aux exercices.

Questions de Cours (4 points) :

1. (2 points) Énoncer le théorème définissant l'espérance conditionnelle (dans le cas intégrable).
2. (1 point) Donner la formule pour $\mathbf{E}(h(X)|Y)$ quand le couple (X,Y) a une densité p.
3. (1 point) Énoncer la propriété de conditionnement successif.

Exercice 1 (6 points)
Soit (X_1, X_2, X_3) un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0,\Gamma)$ avec

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathbf{E}(X_2|X_1) = \frac{X_1}{2}$.
2. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(X_2^3|X_1)$.
3. Calculer $\mathbf{E}(X_1 + X_2|X_3)$.
4. Que vaut $\mathbf{E}((2X_1 + 2X_2 - X_3)^2)$?
5. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}((X_1 + X_2)^3|X_3)$.
6. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(e^{X_1+X_2-X_3}|X_3)$.

Exercice 2 (5 points) Soit $(X,Y) : \Omega \to \{1,2,3\} \times \{-1,0,1\}$ un vecteur aléatoire de loi

$$P_{(X,Y)} = \frac{1}{2}\delta_{\{(1,0)\}} + \frac{1}{8}\delta_{\{(2,1)\}} + \frac{1}{8}\delta_{\{(2,0)\}} + \frac{1}{8}\delta_{\{(3,-1)\}} + \frac{1}{8}\delta_{\{(3,1)\}}.$$

1. Calculer les lois marginales P_X, P_Y.
2. Calculer l'espérance conditionnelle de Y sachant $\sigma(X)$: $\mathbf{E}(Y|X)$.
3. Soit Z de même loi que X ; T de même loi que Y avec Z, T indépendants. Calculer l'espérance conditionnelle du produit Z^3T sachant $\sigma(T)$: $\mathbf{E}(Z^3T|T)$.
4. Calculer l'espérance conditionnelle du produit X^3Y sachant $\sigma(Y)$: $\mathbf{E}(X^3Y|Y)$.

Exercice 3 (5 points) Soit (B_1, B_2) un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}((1,1), C)$ avec

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit N une variable de loi de Bernoulli $(1-p)\delta_1 + p\delta_2$, indépendante de (B_1, B_2).

Soit B_N la variable aléatoire $B_N(\omega) = B_{N(\omega)}(\omega)$.

1. Calculer $E(B_N|N)$.
2. Calculer $E(B_N)$.
3. Calculer $E(B_N^2|N)$ puis $E(B_N^2)$.
4. Calculer $E(B_N|B_1, B_2)$.