Université Claude Bernard
L3 Math Eco Probabilités 5

Mathématiques
2018-2019

Correction du Contrôle continu 2
Mercredi 19 mars 2019

Durée : 1H30

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin de **JUSTIFIER** les réponses aux exercices.

Exercice 1 (6 points)

Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0, \Gamma)$ avec

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathbf{E}(X_2|X_1) = \frac{X_1}{2}$.
   Comme X est un vecteur gaussien, on peut appliquer le théorème de l'espérance conditionelle d'une composante d'un vecteur gaussien, centré $\mathbf{E}(X_2|X_1) = \lambda X_1$ est la projection orthogonal sur $Vect(X_1)$ donc (PC) donne :
   $$\mathbf{E}(\lambda X_1.X_1) = \mathbf{E}(X_2 X_1).$$
   Donc $4\lambda = 2$ d'où $\lambda = 1/2$ et $\mathbf{E}(X_2|X_1) = \frac{X_1}{2}$.
2. On calcule la covariance conditionnelle $c = E((X_2 - \frac{X_1}{2})^2) = A\Gamma A^T$ avec $A = (-1/2, 1, 0)$. Mais $\Gamma A^T = 0$ donc $c = 0$. Donc $X_2 = \frac{X_1}{2}$ p.p. est $\sigma(X_1)$ mesurable donc l'espérance conditionnelle est
   $$\mathbf{E}(X_2^3|X_1) = \left(\frac{X_1}{2}\right)^3.$$
3. Calculons $\mathbf{E}(X_1 + X_2|X_3) = \mathbf{E}(3X_2|X_3) = \mu X_3$ comme au 1. On a l'équation caractérisant la projection : $\mathbf{E}(3X_2X_3) = \mu\mathbf{E}(X_3X_3)$ soit $3 = \mu 6$ et $\mathbf{E}(X_1 + X_2|X_3) = X_3/2$.
4. Que vaut $4c = \mathbf{E}((2X_1 + 2X_2 - X_3)^2) = B\Gamma B^T$ avec $B = (2, 2, -1)$. DOnc $4c = (10, 5, 0)B^T = 30$.
5. Calculons l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}((X_1 + X_2)^3|X_3)$.
   On vient de voir que la covariance conditionnelle est $c = 30/4 = 7,5$. Comme X est gaussien, on applique le théorème du cours décrivant le cas gaussien centé. On cherche $g(m) = \mathbf{E}((Z_m)^3)$ avec $Z_m = m + \sqrt{c}Z \sim \mathcal{N}(m, c)$ (Z normale centrée réduite).
   $g(m) = m^3 + 3m^2\sqrt{c}E(Z) + 3mcE(Z^2) + c\sqrt{c}E(Z^3) = m^3 + 3mc$ vu $E(Z^2) = 1$ et $E(Z) = E(Z^3) = 0$ par parité de la densité de la loi gaussienne standard.
   Bilan, on a obtenu :
   $$\mathbf{E}((X_1 + X_2)^3|X_3) = \left(\frac{X_3}{2}\right)^3 + 45X_3/4.$$

6. Calculons l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(e^{X_1+X_2-X_3}|X_3)$.
D'abord par modularité c'est $\mathbf{E}(e^{X_1+X_2}|X_3)e^{-X_3}$. Par le même théorème, on calcule $g(m) = \mathbf{E}(e^{m+\sqrt{c}Z}) = e^m e^{c/2}$ donc $\mathbf{E}(e^{X_1+X_2-X_3}|X_3) = e^{X_3/2-X_3}e^{c/2} = e^{-X_3/2+30/4}$. (En utilisant le prolongement analytique $\mathbf{E}(e^{\sqrt{c}Z}) = \Phi_Z(-i\sqrt{c}) = e^{c/2}$.

Exercice 2 (5 points) Soit $(X, Y) : \Omega \to \{1, 2, 3\} \times \{-1, 0, 1\}$ un vecteur aléatoire de loi

$$P_{(X,Y)} = \frac{1}{2}\delta_{\{(1,0)\}} + \frac{1}{8}\delta_{\{(2,1)\}} + \frac{1}{8}\delta_{\{(2,0)\}} + \frac{1}{8}\delta_{\{(3,-1)\}} + \frac{1}{8}\delta_{\{(3,1)\}}.$$

1. On Calcule les lois marginales

$$P_X = \frac{1}{2}\delta_{\{(1)\}} + \frac{1}{8}\delta_{\{(2)\}} + \frac{1}{8}\delta_{\{(2)\}} + \frac{1}{8}\delta_{\{(3)\}} + \frac{1}{8}\delta_{\{(3)\}} = \frac{1}{2}\delta_{\{1\}} + \frac{1}{4}\delta_{\{2\}} + \frac{1}{4}\delta_{\{3\}},$$

$$P_Y = \frac{1}{2}\delta_{\{(0)\}} + \frac{1}{8}\delta_{\{(1)\}} + \frac{1}{8}\delta_{\{(0)\}} + \frac{1}{8}\delta_{\{(-1)\}} + \frac{1}{8}\delta_{\{(1)\}} = \frac{1}{4}\delta_{\{1\}} + \frac{5}{8}\delta_{\{0\}} + \frac{1}{8}\delta_{\{-1\}}.$$

2. Calculer l'espérance conditionnelle de Y sachant $\sigma(X)$: Par la formule du cas discret

$$\mathbf{E}(Y|X) = \sum_{k=1}^{3} \frac{E(1_{\{X=k\}}Y)}{P(X=k)} 1_{\{X=k\}} = 01_{\{X=1\}} + \frac{1.1/8}{1/8}1_{\{X=2\}} + \frac{1/8 - 1/8}{1/8}1_{\{X=3\}} = 1_{\{X=2\}}.$$

3. Soit Z de même loi que X ; T de même loi que Y avec Z, T indépendants. Calculer l'espérance conditionnelle du produit Z^3T sachant $\sigma(T)$: $\mathbf{E}(Z^3T|T) = TE(Z^3)$ par modularité et indépendance. Or $E(Z^3) = E(X^3) = 1/2 + 2^2/4 + 3^2/4 = 15/4$ donc $\mathbf{E}(Z^3T|T) = 15T/4$.
4. Calculer l'espérance conditionnelle du produit X^3Y sachant $\sigma(Y)$: $\mathbf{E}(X^3Y|Y) = YE(X^3|Y)$ par modularité.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X^3|Y) &= \sum_{k=-1}^{1} \frac{E(1_{\{Y=k\}}X^3)}{P(Y=k)} 1_{\{Y=k\}} \\ &= \frac{8/8 + 27/8}{1/4}1_{\{Y=1\}} + \frac{4/8 + 4/8}{1/4}1_{\{Y=0\}} + \frac{27/8}{1/8}1_{\{Y=-1\}} \\ &= 41_{\{Y=0\}} + 27\ 1_{\{Y=-1\}} + \frac{35}{2}1_{\{Y=1\}}.\end{aligned}$$

Donc, en multipliant par Y :

$$\mathbf{E}(X^3Y|Y) = -27\ 1_{\{Y=-1\}} + \frac{35}{2}1_{\{Y=1\}}.$$

Exercice 3 (5 points) Soit (B_1, B_2) un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}((1, 1), C)$ avec

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit N une variable de loi de Bernoulli $(1-p)\delta_1 + p\delta_2$, indépendante de (B_1, B_2).

Soit B_N la variable aléatoire $B_N(\omega) = B_{N(\omega)}(\omega)$.

1. $B_N = B_1 1_{\{N=1\}} + B_2 1_{\{N=2\}}$.
   Donc par modularité vu que les indicatrices sontmesurables pour $\sigma(N)$:
   $$E(B_N|N) = E(B_1|N)1_{\{N=1\}} + E(B_2|N)1_{\{N=2\}}.$$
   Par indépendance, on déduit :
   $$E(B_N|N) = E(B_1)1_{\{N=1\}} + E(B_2)1_{\{N=2\}} = 1.$$
2. Par (PC) $E(B_N) = E(E(B_N|N)) = 1$.
3. Calculer $E(B_N^2|N) = E((B_1 1_{\{N=1\}} + B_2 1_{\{N=2\}})^2|N) = E(B_1^2)1_{\{N=1\}} + E(B_2^2)1_{\{N=2\}})$ par modularité et indépendance, donc :
   $$E(B_N^2|N) = E(B_1^2)1_{\{N=1\}} + E(B_2^2)1_{\{N=2\}} = (1+1)1_{\{N=1\}} + (1+2)1_{\{N=2\}}.$$
   puis $E(B_N^2) = (1+1)(1-p) + (1+2)p = 2+p$.
4. Calculons par modularité $E(B_N|B_1, B_2) = B_1E(1_{\{N=1\}}|B_1, B_2) + B_2E(1_{\{N=2\}}|B_1, B_2)$. Puis par indépendance de N, on obtient :
   $$E(B_N|B_1, B_2) = B_1E(1_{\{N=1\}}) + B_2E(1_{\{N=2\}}) = pB_1 + (1-p)B_2.$$