Université Claude Bernard
L3 Math Eco Probabilités 5

Mathématiques
2018-2019

Contrôle continu
Mercredi 10 avril 2019

Durée : 1H30

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin de **JUSTIFIER** les réponses aux exercices.

Questions de Cours (4 points) :

1. (1,5 points) Énoncer le théorème de classification des états.
2. (1 point) Donner les formulations équivalentes sur un état d'une chaîne de Markov pour qu'un état soit transitoire.
3. (1,5 points) Énoncer la propriété de Markov forte pour une chaîne de Markov (avec la définition de la tribu $\mathcal{F}_T$ associée à un temps d'arrêt.)

Exercice 1 (7 points+ Bonus : 2 points) On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur l'ensemble $E = \{1, 2, \ldots, 5\}$ donnée par la matrice de transition suivante (les numéros de colonnes et lignes rappellent le nom des états).

$$P = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 4 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 5 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{array}$$

On rappelle que l'on note $\mathbf{P}_x$ la probabilité pour la chaîne $CM(E, \delta_x, P)$ partant de x. $\mathbf{E}_x$ est l'espérance pour $\mathbf{P}_x$.

1. Classifier les états (c'est-à-dire : trouver les classes irréductibles, les états récurrents et transitoires).
2. Trouver les mesures de probabilité invariantes de la chaîne.
3. Soit τ_3 le temps d'atteinte de l'état 3, c'est-à-dire :

$$\tau_3 = \inf\{n \geq 1, X_n = 3\}.$$

Calculer $\mathbf{E}_3(\tau_3)$.

4. Calculer $\mathbf{E}_1(\tau_3)$.
5. **(Bonus : 2 points)** Calculer le moment d'ordre 2 de τ_3 pour $\mathbf{P}_2$: $\mathbf{E}_2(\tau_3^2)$.

Exercice 2 (9 points) On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur l'ensemble $E = \{1, 2, \ldots, 8\}$ donnée par la matrice de transition suivante (les numéros de colonnes et lignes rappellent le nom des états).

$$Q = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & 1/4 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 4 & 2/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

On rappelle que l'on note $\mathbf{P}_x$ la probabilité pour la chaîne $CM(E, \delta_x, Q)$ partant de x. $\mathbf{E}_x$ est l'espérance pour $\mathbf{P}_x$.

1. Classifier les états (c'est-à-dire : trouver les classes irréductibles, les états récurrents et transitoires) .
2. Trouver les mesures de probabilité invariantes pour chaque classe irréductible récurrente.
3. Quelles sont les mesures de probabilité invariantes de la chaîne complète (de matrice Q) ?
4. Soit τ le temps d'atteinte de la classe $\{2, 5\}$, c'est-à-dire :

$$\tau = \inf\{n \geq 1, X_n \in \{2, 5\}\}.$$

   Calculer $\mathbf{E}_2(\tau)$.
5. Soient les ensembles $C_1 = \{1, 4\}$, $C_2 = \{7, 8\}$. Pour $i = 1, 2$ et $x \in E$, calculer

$$\mathbf{P}_x(X_n \in C_i \text{ pour tout } n \text{ assez grand}).$$