Université Claude Bernard
L3 Math Eco Probabilités 5

Mathématiques
2018-2019

Correction du Contrôle continu
Mercredi 10 avril 2019

Durée : 1H30

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin de **JUSTIFIER** les réponses aux exercices.

Questions de Cours (4 points) :

1. (1,5 points) Énoncer le théorème de classification des états.
2. (1 point) Donner les formulations équivalentes sur un état d'une chaîne de Markov pour qu'un état soit transitoire.
3. (1,5 points) Énoncer la propriété de Markov forte pour une chaîne de Markov (avec la définition de la tribu $\mathcal{F}_T$ associée à un temps d'arrêt.)

Exercice 1 (7 points+ Bonus : 2 points) On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur l'ensemble $E = \{1, 2, \ldots, 5\}$ donnée par la matrice de transition suivante (les numéros de colonnes et lignes rappellent le nom des états).

$$P = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 4 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 5 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{array}$$

On rappelle que l'on note $\mathbf{P}_x$ la probabilité pour la chaîne $CM(E, \delta_x, P)$ partant de x. $\mathbf{E}_x$ est l'espérance pour $\mathbf{P}_x$.

1. Classifions les états (c'est-à-dire : trouver les classes irréductibles, les états récurrents et transitoires).

   On a $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 1$, donc il y a une seule classe irréductible E. Elle est forcément fermée et finie, donc E est la classe irréductible récurrente.

2. Trouvons la mesure de probabilité invariante de la chaîne.

   $\pi = x_1\delta_1 + x_2\delta_2 + x_3\delta_3 + x_4\delta_4 + x_5\delta_5,\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in [0,1], X^t = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, elle vérifie $P^t X = X$:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1,$$

$$x_1/2 + x_2/2 + x_5/3 = x_1, (L1)$$

$$x_1/2 + x_5/3 = x_2, (L2)$$

$$x_2/2 + x_4/3 = x_3, (L3)$$

$$x_3/2 + x_4/3 + x_5/3 = x_4, (L4)$$

$$x_3/2 + x_4/3 = x_5, (L5).$$

En calculant $(L4)-(L5)$, on a $4x_5/3 = x_4$. En remplaçant cette valeur dans (L5), $x_3/2 + 4x_5/9 = x_5$, on a $x_3 = 10x_5/9$.
De même $(L1)-(L2)$, on a $3x_2/2 = x_1$. En remplaçant cette valeur dans (L2), $3x_2/4 + x_5/3 = x_2$, on a $x_2 = 4x_5/3$, donc $x_1 = 2x_5$.
La condition de probabilité donne : $x_5 + 4x_5/3 + 2x_5 + 10x_5/9 + 4x_5/3 = 1$. Soit $x_5 = 9/61$.
On a donc obtenu $\pi = \frac{18}{61}\delta_1 + \frac{12}{61}\delta_2 + \frac{10}{61}\delta_3 + \frac{12}{61}\delta_4 + \frac{9}{61}\delta_5$.

3. Soit τ_3 le temps d'atteinte de l'état 3, c'est-à-dire :

$$\tau_3 = \inf\{n \geq 1, X_n = 3\}.$$

Par le théorème des mesures invariantes : $\mathbf{E}_3(\tau_3) = \frac{1}{\pi(\{3\})} = \frac{61}{10}$.

4. Calculons $\mathbf{E}_1(\tau_3)$.
On pose $x_j = \mathbf{E}_j(\tau_3)$. Par l'application de Markov faible vu en TD, on a le système $x_j = 1 + \sum_{i\neq 3} P_{ji}x_i$.
Ici cela donne un système fermé pour x_1, x_2 :

$$x_1 = 1 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2,$$
$$x_2 = 1 + \frac{1}{2}x_1.$$

On déduit $x_2 = 4, x_1 = 6$ soit $\mathbf{E}_1(\tau_3) = 6$.

5. **(Bonus : 2 points)** Calculons le moment d'ordre 2 de τ_3 pour $\mathbf{P}_2$: $\mathbf{E}_2(\tau_3^2)$.
On pose $y_j = \mathbf{E}_j(\tau_3^2)$.
ON décompose par union disjointe :

$$y_j = \sum_{i\in E} \mathbf{E}_j(1_{\{X_1=i\}}\tau_3^2).$$

si $X_1 = 3$, $\tau_3 = 1$ sinon $\tau_3 = 1 + \tau_3 \circ \theta_1$ donc on décompose :
$$y_j = P_{j,3} + \sum_{i\neq 3} \mathbf{E}_j(1_{\{X_1=i\}}(1+2\tau_3\circ\theta_1+\tau_3^2\circ\theta_1)) = \mathbf{E}_j(1_{\{X_1=3\}}(-1+2\tau_3)) + \sum_{i\neq 3} \mathbf{E}_j(1_{\{X_1=i\}}(-1+2\tau_3+\tau_3^2\circ\theta_1))$$
où on a utilisé que si $X_1 = 3$, $2\tau_3 - 1 = 1 = \tau_3$. Donc en rassemblant la somme et en utilisant (PC) puis Markov faible :

$$y_j = \mathbf{E}_j((-1+2\tau_3)) + \sum_{i\neq 3} \mathbf{E}_j(1_{\{X_1=i\}}E((\tau_3^2\circ\theta_1)|\mathcal{F}_1)) = (2x_j - 1) + \sum_{i\neq 3} \mathbf{E}_j(1_{\{X_1=i\}}E_{X_1}(\tau_3^2)),$$

soit
$$y_j = (2x_j - 1) + \sum_{i\neq 3} P_{j,i}y_i,$$

On obtient donc le système (en remplaçant avec les valeurs de la question précédente) :

$$x_1 = 2x_1 - 1 + \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 = 11 + \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2,$$
$$y_2 = 2x_2 - 1 + \frac{1}{2}y_1 = 7 + \frac{1}{2}y_1.$$

La solution est $y_2 = 36, y_1 = 58$ soit $\mathbf{E}_2(\tau_3^2) = 36$.

Exercice 2 (9 points) On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur l'ensemble $E = \{1, 2, \ldots, 8\}$ donnée par la matrice de transition suivante (les numéros de colonnes et lignes rappellent le nom des états).

$$Q = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & 1/4 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 4 & 2/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

On rappelle que l'on note $\mathbf{P}_x$ la probabilité pour la chaîne $CM(E, \delta_x, Q)$ partant de x. $\mathbf{E}_x$ est l'espérance pour $\mathbf{P}_x$.

1. Classifions les états (c'est-à-dire : trouver les classes irréductibles, les états récurrents et transitoires) .

   $\{1, 4\}$ et $\{2, 5\}, \{8\}$ sont irréductibles fermés finis, donc récurrentes.

   $\{3, 6\}$ et $\{7\}$ sont irréductibles mais $7 \to 8 \not\to 8$ donc 7 transitoire. De même $6 \to 4 \not\to 6$ donc la classe $\{3, 6\}$ est aussi ouverte donc irréductible transitoire.

2. Trouver les mesures de probabilité invariantes pour chaque classe irréductible récurrente.

   Sur $\{8\}$ la seule probabilité possible est δ_8.

   Sur $\{1, 4\}$, la probabilité invariante $\pi_1 = x_1\delta_1 + x_4\delta_4$ vérifie :

$$x_1/4 + 2x_4/3 = x_1$$
$$3x_1/4 + x_4/3 = x_4$$
$$x_1 + x_4 = 1$$

   soit $x_1 = 8x_4/9$ et donc

$$x_1 = 8/17, x_4 = 9/17$$

$$\pi_1 = \frac{8}{17}\delta_1 + \frac{9}{17}\delta_4$$

   Sur Sur $\{2, 5\}$, la probabilité invariante $\pi_2 = x_2\delta_2 + x_5\delta_5$ vérifie :

$$2x_5/3 = x_2$$
$$x_2 + x_5/3 = x_5$$
$$x_2 + x_5 = 1$$

   soit $x_2 = 3/5$ et donc $x_5 = 2/5$

$$\pi_2 = \frac{3}{5}\delta_1 + \frac{2}{5}\delta_5.$$

3. Quelles sont les mesures de probabilité invariantes de la chaîne complète (de matrice Q) ? Par le théorème sur les chaînes finies, les mesures invariantes sont de la forme suivante avec $t_1 \in [0,1], t_2 \in [0,1]$ avec $t_1 + t_2 \leq 1$:

$$t_1\pi_1 + t_2\pi_2 + (1 - t_1 - t_2)\delta_8.$$

4. Soit τ le temps d'atteinte de la classe $\{2,5\}$, c'est-à-dire :

$$\tau = \inf\{n \geq 1, X_n \in \{2,5\}\}.$$

Calculons $\mathbf{E}_2(\tau)$.
Sous l'évènement $\{X_0 = 2\}$ $X_1 \in \{2,5\}$ puisque la chaine est fermé donc $1_{\{X_0=2\}}\tau = 1_{\{X_0=2\}}$ soit $\mathbf{E}_2(\tau) = E_2(1) = 1$.

5. Soient les ensembles $C_1 = \{1,4\}$, $C_2 = \{7,8\}$. Pour $i = 1,2$ et $x \in E$, calculons

$$u_x = \mathbf{P}_x(X_n \in C_1 \text{ pour tout } n \text{ assez grand}).$$

$$v_x = \mathbf{P}_x(X_n \in C_2 \text{ pour tout } n \text{ assez grand}).$$

Comme C_1 fermé, si $x \in C_1$, $u_x = 1$, $v_x = 0$. Comme $C_3 = \{2,5\}$ fermé, si $x \in C_3$, $u_x = 0 = v_x$
Si $x \in C_2$ vu C_2 fermé, $u_x = 0$, $v_x = 1$.
Il reste donc à calculer les valeurs pour $x \in \{3,6\}$.
Or on a vu en TD le système suivant venant de Markov faible :

$$u_x = \sum_{y\in E} P_{x,y}u_y, v_x = \sum_{y\in E} P_{x,y}v_y.$$

Donc ici :

$$u_3 = u_6/3 + u_1/3 + u_5/3 = u_6/3 + 1/3$$
$$u_6 = u_3/5 + u_6/5 + u_4/5 + u_2/5 + u_7/5 = u_3/5 + u_6/5 + 1/5 = u_3/5 + (3u_3 - 1)/5 + 1/5$$

donc $u_3 = u_6/3 + 1/3 = 4u_3/15 + 1/3$ soit $u_3 = 5/11$, $u_6 = 4/5u_3 = 4/11$.

$$v_3 = v_6/3 + v_1/3 + v_5/3 = v_6/3$$
$$v_6 = v_3/5 + v_6/5 + v_4/5 + v_2/5 + v_7/5 = v_3/5 + v_6/5 + 1/5 = v_6/15 + 3v_6/15 + 1/5$$

donc $11v_6/15 = 1/5$, soit $v_6 = 3/11, v_3 = 1/11$.