Université Claude Bernard
L3 Math-Eco Probabilités 5

Mathématiques
2016-2017

Contrôle continu final
Mercredi 17 mai 2017

Durée : 2H

Les documents, les téléphones et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin de JUSTIFIER les réponses aux exercices.
Le sujet contient 4 exercices et des questions de cours.

Questions de Cours (4 points) :

1. (1,5 points) Énoncer le théorème de construction du processus de Poisson.
2. (1 point) Énoncer la propriété de Markov forte pour le processus de Poisson.
3. (1,5 points) Énoncer le théorème de caractérisation du mouvement brownien géométrique de volatilité σ et de taux moyen μ.

Exercice 1 (4 points + Bonus : 1 point) On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur l'ensemble $E = \{1, 2, \ldots, 8\}$ donnée par la matrice de transition suivante (les numéros de colonnes et lignes rappellent le nom des états).

$$Q = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & 5/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5/6 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5/6 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \end{array}$$

On rappelle que l'on note $\mathbf{P}_x$ la probabilité pour la chaîne $CM(E, \delta_x, Q)$ partant de x et de matrice de transition Q. $\mathbf{E}_x$ est l'espérance pour $\mathbf{P}_x$. Soit τ_x le temps d'atteinte de l'état x, c'est-à-dire :

$$\tau_x = \inf\{n \geq 1, X_n = x\}.$$

1. Classifier les états (c'est-à-dire : trouver les classes irréductibles, les états récurrents et transitoires)
2. Trouver les mesures de probabilités invariantes pour chaque classe irréductible récurrente puis les mesures de probabilités invariantes de la chaîne complète.
3. Calculer $\mathbf{E}_6(\tau_6)$.
4. Calculer $\mathbf{E}_5(\tau_4)$.
5. Calculer $\mathbf{E}_1(\tau_4)$.
6. **Bonus (1 point)** Soit C l'unique classe irréductible close contenant 2 états. Pour $x \in E$, calculer

$$\mathbf{P}_x(X_n \in C \text{ pour tout } n \text{ assez grand}).$$

Exercice 2 (3 points)

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard et $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$, indépendants.

1. Calculer $E(B_s^3 B_t^3)$ pour $s < t$.
2. Calculer $E(N_s^2 N_t)$ pour $s < t$.
3. Calculer $E(B_s^2 N_s^2)$.

Exercice 3 (4 points)

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard.

1. Calculer, si elle existe, la densité de la loi de la variable aléatoire (B_1, B_2).
2. Soit $s > 0$. Calculer $\mathbf{E}(B_s|B_{2s}, B_{3s})$.
3. Montrer que $\mathbf{E}(B_s|B_{2s}) = \frac{1}{2}B_{2s}$.
4. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(B_s^2|B_{2s})$.
5. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(B_s^4|B_{2s})$.

Exercice 4 (5 points + Bonus :1 point)

Des clients arrivent dans une banque selon un processus de Poisson N_t d'intensité $\lambda > 0$. Le temps t est mesuré en heures. Ainsi N_1 compte le nombre d'arrivées en 1 heure.

1. Calculer l'espérance du nombre de clients arrivés pendant les 2 premières heures $E(N_2)$.
2. Rappeler la loi de l'instant d'arrivée S_2 du 2 ème client et calculer $E(S_2)$.
3. Calculer la probabilité que 2 clients soient arrivés dans les 20 premières minutes sachant que 3 clients sont arrivés durant la première heure.
4. Soit X_n le temps nécessaire pour servir le n-ième client arrivé. On suppose que les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes et identiquement distibués de loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$, et qu'elles sont indépendantes de $(N_t)_{t>0}$. Il y a un seul guichet ouvert. Chaque client doit attendre que les clients précédents soient servis pour être lui-même servi.
   Calculer la probabilité que le 2 ème client doive attendre avant d'être servi.
5. **Bonus (1 point)** Soit S_k le temps d'arrivée du n-ième client. Calculer la loi de S_k sachant $N_t = n$ pour $n \geq k$.
6. On définit
   $$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} (t - S_k)^2.$$
   Calculer $E(X_t|N_t = n)$ puis $E(X_t)$.