Université Claude Bernard — Mathématiques
L3 Mthe-Eco 61 Probabilités 5 — 2016-2017

Contrôle continu final
Mercredi 17 mai 2017

Durée : 2H

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin de JUSTIFIER les réponses aux exercices.

Questions de Cours (4 points) :

1. (2 points) Énoncer le théorème de construction du processus de Poisson.
2. (1 point) Énoncer la propriété de Markov forte pour le processus de Poisson.
3. (1 point) Énoncer le théorème de caractérisation du mouvement brownien géométrique de volatilité σ et de taux moyen μ.

Exercice 1 (4 points + Bonus : 1 point) On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur l'ensemble $E = \{1, 2, \ldots, 8\}$ donnée par la matrice de transition suivante (les numéros de colonnes et lignes rappellent le nom des états).

$$Q = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & 5/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5/6 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5/6 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \end{array}$$

On rappelle que l'on note $\mathbf{P}_x$ la probabilité pour la chaîne $CM(E, \delta_x, P)$ partant de x. $\mathbf{E}_x$ est l'espérance pour $\mathbf{P}_x$. Soit τ_4 le temps d'atteinte de l'état 4, c'est-à-dire :

$$\tau_4 = \inf\{n \geq 1, X_n = 4\}.$$

1. Classifions les états (c'est-à-dire : trouver les classes irréductibles, les états récurrents et transitoires)

   On a $6 \to 8 \to 6$ sans d'autres connections sortantes vers d'autres états donc $C := \{6, 8\}$ est une classe irréductible close donc récurrente.

   On a $\{4\}$ absorbant donc classe irréductible close donc récurrente.

   On a $1 \to 2 \to 3 \to 1$ et $\{1, 2, 3\}$ et $3 \to 4 \not\to 3$ sans autre connexions sortante, donc c'est classe irréductible et 3 transitoire donc toute la classe est transitoire..

   $5 \to 1 \not\to 5$ donc 5 transitoire. De plus $5 \to 7 \to 5$ donc $\{5, 7\}$ est la dernière classe irréductible et on a vu que $\{5, 7\}$ est transitoire comme 5 transitoire.

2. Trouvons les mesures de probabilités invariantes pour chaque classe irréductible récurrente puis les mesures de probabilités invariantes de la chaîne complète.

   On trouve l'unique mesure de probabilité invariante de C $p\delta_6 + (1-p)\delta_8$, $p \in [0,1]$ elle vérifie $p/2 + (1-p)/3 = p$ et $p/2 + (1-p)2/3 = (1-p)$ ce qui force $5p/6 = 1/3$ soit $p = 2/5$. Donc la mesure invariante est $\pi = \frac{2}{5}\delta_6 + \frac{3}{5}\delta_8$.

   L'unique mesure de probabilité invariante sur la classe $\{4\}$ est δ_4.

   Les mesures de probabilités invariantes de la chaîne complète (de matrice Q) sont les combinaisons convexes de celles sur les classes irréductibles à savoir : $t\pi + (1-t)\delta_4$ avec $t \in [0,1]$.

3. $\mathbf{E}_6(\tau_6) = 1/\pi_6 = 5/2$ par la relation du cours avec la probabilité invariante.

4. Calculons $\mathbf{E}_5(\tau_4) \geq E_5(\tau_4 1_{\{X_1=6\}}) = P_5(X_1 = 6)\mathbf{E}_6(\tau_4) = +\infty$. par la propriété de Markov faible et car 6 est dans une classe irréductible différente de 4 donc le tenmps d'attente de 4 partant de 6 est infini.

5. Calculons $\mathbf{E}_1(\tau_4)$.

   Par Markov faible on a $\mathbf{E}_1(\tau_4) = 1 + 5/6\mathbf{E}_1(\tau_4) + \mathbf{E}_2(\tau_4)/6$. Il faut donc une équation sur $E_2(\tau_4)$ $\mathbf{E}_2(\tau_4) = 1 + 5/6\mathbf{E}_1(\tau_4) + \mathbf{E}_3(\tau_4)/6$.

   Il faut donc une équation sur $E_3(\tau_4)$ obtenue de même par Markov faible : $\mathbf{E}_3(\tau_4) = 5/6\mathbf{E}_1(1 + \tau_4) + 1/6 = 1 + \mathbf{E}_1(\tau_4)5/6$.

   On résout le système :

   $\mathbf{E}_2(\tau_4) = 1 + 5/6\mathbf{E}_1(\tau_4) + 1/6 + \mathbf{E}_1(\tau_4)5/6^2$

   puis $\mathbf{E}_1(\tau_4) = 1 + 5/6\mathbf{E}_1(\tau_4) + 1/6 + 5/6^2\mathbf{E}_1(\tau_4) + 1/6^2 + \mathbf{E}_1(\tau_4)5/6^3$.

   DOnc $\mathbf{E}_1(\tau_4) = \frac{1-1/6^3}{1-1/6} + 5/6\frac{1-1/6^3}{1-1/6}\mathbf{E}_1(\tau_4)$. soit encore $\mathbf{E}_1(\tau_4) = 6^3\frac{1-1/6^3}{1-1/6} = (6^3-1)6/5 = 43 \times 6 = 258$.

6. **Bonus (1 point)** Soit C l'unique classe irréductible close contenant 2 états. Pour $x \in E$, calculer

$$p_x = \mathbf{P}_x(X_n \in C \text{ pour tout } n \text{ assez grand}).$$

Pour $x \in \{1,2,3,4\}$ aucun chemin ne même à C donc $p_1 = p_2 = p3 = p4 = 0$.
Pour $x \in \{6,8\} = C$ comme la marche reste dans C par récurrence, $p_6 = p_8 = 1$
Il reste à utiliser Markov faible pour trouver un système sur p_5, p_7
SOit $A = \{X_n \in C$ pour tout n assez grand$\}$ On a

$$p_5 = P_5(A) = E_5(A(1_{\{X_1=1\}} + 1_{\{X_1=6\}} + 1_{\{X_1=7\}}) = P_5(X_1 = 1)p_1 + P_5(X_1 = 6)p_6 + P_5(X_1 = 7)p_7 = p_7/3 + 1/3$$

$$p_7 = P_7(A) = E_7(A(1_{\{X_1=5\}} + 1_{\{X_1=7\}} + 1_{\{X_1=8\}}) = P_7(X_1 = 5)p_1 + P_7(X_1 = 7)p_7 + P_7(X_1 = 8)p_8 = p_5/3 + p_7/3 +$$

Donc $2p_7 = p_5 + 1$, $3p_5 = p_7 + 1$, soit $6p_5 - 2 = 2p_7 = p_5 + 1$, $p_5 = 3/5, p_7 = 4/5$.

Exercice 2 (3 points)

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ indépendants.

1. Calculons $E(B_s^3 B_t^3)$ pour $s < t$.
   Par indépendance des incréments $B_t - B_s, B_s$, on a
   $$\begin{aligned} E(B_s^3 B_t^3) &= E(B_s^3(B_s^3 + (B_t - B_s)^3 + 3B_s^2(B_t - B_s) + 3B_s(B_t - B_s)^2) \\ &= E(B_s^6) + E(B_s^3)E((B_t - B_s)^3) + 3E(B_s^5)E(B_t - B_s) + 3E(B_s^4)E((B_t - B_s)^2) \end{aligned}$$
   Or les moments impaires sont nuls par parité. On utilise la relation $E(B_s P(B_s)) = sE(P'(B_s))$ pour un polynôme. On obtient :$E(B_s^4) = 3sE(B_s^2) = 3s^2$, $E(B_s^6) = 5sE(B_s^4) = 15s^3$.
   En bilan on a
   $$E(B_s^3 B_t^3) = 15s^3 + 9s^2(t - s).$$
2. Calculons de même par indépendance des incréments :$E(N_s^2 N_t) = E(N_s^3) + E(N_s^2)E((N_t - N_s))$ pour $s < t$. Comme $N_t - N_s$ est une variable de Poisson de paramètre $\lambda(t-s)$ on a $E((N_t - N_s)) = \lambda(t - s)$, $Var(N_s)) = \lambda s$ donc $E(N_s^2) = \lambda s + \lambda^2 s^2$.
   Calculons
   $$E(N_s(N_s - 1)(N_s - 2)) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k - 1)(k - 2)\frac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda s} = (\lambda s)^3$$
   Donc
   $$E(N_s^3) = (\lambda s)^3 + 3E(N_s^2) - 2E(N_s) = (\lambda s)^3 + 3(\lambda s)^2 + \lambda s$$
   D'où
   $$\begin{aligned} E(N_s^2 N_t) = (\lambda s)^3 + 3E(N_s^2) - 2E(N_s) &= (\lambda s)^3 + 3(\lambda s)^2 + \lambda s \\ &+ \lambda(t - s)(\lambda s + \lambda^2 s^2) \end{aligned}$$
3. Calculons par indépendance $E(B_s^2 N_s^2) = E(B_s^2)E(N_s^2) = s(\lambda s + \lambda^2 s^2)$.

Exercice 3 (4 points)

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien.

1. Calculer, si elle existe, la densité de la loi de la variable aléatoire (B_1, B_2). La covariance est $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $det(C) = 1.2 - 1 = 1 \neq 0$ donc la densité existe $C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ Donc (B_1, B_2) a une densité
   $$\frac{1}{2\pi}exp(-\frac{2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2}{2}).$$
2. Soit $s > 0$. Calculons $\mathbf{E}(B_s|B_{2s}, B_{3s}) = \lambda B_{2s} + \mu B_{3s}$.
   On a les relations par (PC) :
   $$E((\lambda B_{2s} + \mu B_{3s})B_{2s}) = E(B_s B_{2s}) = s = (\lambda + \mu)2s$$
   $$E((\lambda B_{2s} + \mu B_{3s})B_{3s}) = E(B_s B_{3s}) = s = (\lambda 2s + \mu 3s)$$
   ce qui donne $\mu = 0$, $s = \lambda 2s$ soit $\lambda = 1/2$. $E((\lambda B_{2s} + \mu B_{3s})B_{2s}) = \frac{1}{2}B_{2s}$

3. Par onditionnement successif :

$$\mathbf{E}(B_s|B_{2s}) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(B_s|B_{2s}, B_{3s})|B_{2s}) = \frac{1}{2}B_{2s}.$$

4. Calculons l'espérance conditionnelle par modularité $\mathbf{E}(B_s^2|B_{2s}) = \mathbf{E}((B_s - \mathbf{E}(B_s|B_{2s}))^2|B_{2s}) + \mathbf{E}(B_s|B_{2s}))^2$.
   Puis comme $(B_s - \mathbf{E}(B_s|B_{2s}))$ est indépendant de B_{2s} par le cours, on obtient :

$$\mathbf{E}(B_s^2|B_{2s}) = \mathbf{E}((B_s - \frac{1}{2}B_{2s})^2) + \mathbf{E}(B_s|B_{2s}))^2 = s + \frac{1}{4}2s - s + \frac{1}{4}B_{2s}^2 = \frac{s}{2} + \frac{1}{4}B_{2s}^2.$$

5. Calculons l'espérance conditionnelle par modularité et indépendance et annulation des moments impairs comme ci-dessus

$$\mathbf{E}(B_s^4|B_{2s}) = \mathbf{E}(B_s|B_{2s}))^4 + 6\mathbf{E}(B_s|B_{2s}))^2 E((B_s - \frac{1}{2}B_{2s})^2) + E((B_s - \frac{1}{2}B_{2s})^4) = \frac{1}{16}B_{2s}^4 + \frac{3s}{4}B_{2s}^2 + 3\frac{s^2}{4}$$

Exercice 4 (5 points + Bonus :1 point)

Des clients arrivent dans une banque selon un processus de Poisson N_t d'intensité $\lambda > 0$. Le temps $t = 1$ est pour le nombre d'arrivée en 1 heure.

1. Calculer l'espérance du nombre de clients arrivés pendant les 2 premières heures $E(N_2) = 2\lambda$ vu N_2 de loi de Poisson de paramètre 2λ
2. Par le cours La loi de l'instant d'arrivée S_2 du 2 ème client est une loi *Gamma* de densité $s\lambda^2 e^{-\lambda s} 1_{s>0}$ et son espérance $E(S_2) = E(T_1 + T_2) = 2/\lambda$. vu que l'espérance d'une v.a exponentielle de paramètre λ comme T_i est $1/\lambda$.
3. La probabilité que 2 clients soient arrivés dans les 20 premières minutes sachant que 3 clients sont arrivés durant la première heure est

$$P(N_{1/3} = 2|N_1 = 3) = \frac{P((N_1 - N_{1/3}) = 1, N_{1/3} = 2)}{P(N_1 = 3)}$$

   Or pour la loi de Poisson $P(N_s - N_t = k) = \lambda^k (t-s)^k e^{-\lambda(t-s)}/k!$ donc

$$P(N_{1/3} = 2|N_1 = 3) = \frac{\lambda(2/3)e^{-\lambda(2/3)}\lambda^2(1/3)^2 e^{-\lambda(1/3)}3!}{2!\lambda^3 e^{-\lambda}} = \frac{2}{3}.$$

4. Soit X_n le temps nécessaire pour servir le n-ième client arrivé. On suppose suit qu'elles sont indépendantes et identiquement distibués de loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$, et qu'elles sont indépendantes de N_t. Il y a un seul guichet ouvert. Calculer la probabilité que le 2 ème client doive attendre.
   Le deuxième client doit attendre si son temps d'arrivée S_2 est plus petit que $T_1 + X_1$ le temps de fin de service du premier client, soit :

$$P(S_2 \leq T_1 + X_1) = P(T_2 \leq X_1) = \int_0^\infty dt \int_0^\infty dx 1_{t \leq x} \lambda\mu e^{-\lambda t} e^{-\mu x} = \int_0^\infty dx \lambda e^{-(\mu+\lambda)x} = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}.$$

5. **Bonus (1 point)** Soit S_k le temps d'arrivée du n-ième client. Calculer la loi de S_k sachant $N_t = n$ pour $n \geq k$.

6. Soit $X_t = \sum_{k=1}^{N_t}(t-S_k)^2$. Comme en TD $E(X_t|N_t=n) = E(\sum_{k=1}^{n}(t-S_k)^2|N_t=n)$ SOit Y_k des variables iid uniformes sur $[0,t]$ comme par le cours conditionnellement à $N_t = n$, la loi de $(S_1, ..., S_n)$ est égale à la loi de $(Y_1, ..., Y_n)$ réordonné et que a fonction ne dépent pas de l'ordre, on obtient :

$$E(X_t|N_t=n) = E(\sum_{k=1}^{n}(t-Y_k)^2) = nE((t-X_1)^2) = n\frac{1}{t}\int_0^t ds(t-s)^2 = n\frac{t^2}{3}$$

Or par le cours $E(X_t|N_t) = \sum_{n=1}^{\infty} E(X_t|N_t=n)1_{N_t=n} = N_t\frac{t^2}{3}$ Donc par PC

$$E(X_t) = E(E(X_t|N_t)) = \frac{t^2}{3}E(N_t) = \frac{\lambda t^3}{3}.$$