Feuille de TD 1

Fonctions caractéristiques, vecteurs gaussiens.

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité (Ω, Σ, P).

Exercice 1
Soit $X_1, \dots, X_N$, $N \geq 2$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées (v.a.i.i.d.) de loi de Bernoulli, $X_1(P) = p\delta_1 + (1-p)\delta_0$, où $p \in]0,1[$ est fixé .
1.Calculer la transformée de Fourier de X_1, puis celle de $Z = X_1 + \cdots + X_N$.
2.-En déduire la loi de la variable aléatoire $Z = X_1 + \cdots + X_N$.

Exercice 2 Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$P(X = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

1. Donner la loi P_X de X
2. Calculer $\mathbf{E}(X)$ puis la fonction caractéristique $\Phi_X(t)$
3. On pose $Y = (-1)^X$. Donner la loi de Y.
4. Soit Z une autre v.a. de Poisson de paramètre $\mu > 0$. Calculer $E[e^{it(X+Z)}]$. En déduire la loi de $X + Z$.

Exercice 3 Calculs de Fonctions caractéristiques.
Soient X_1, X_2, X_3, X_4 v.a. indépendantes de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Trouver la fonction caractéristique de Y de loi $P_Y(dy) = \frac{1}{2}e^{-|y|}dy$.
2. En déduire la fonction caractéristique d'une variable Z de loi de Cauchy i.e. $P_Z(dz) = \frac{1}{\pi(1+z^2)}dz$.
3. Trouver la fonction caractéristique de X_1X_2.
4. Déterminer la fonction caractéristique et la loi de la variable $X_1X_2 + X_3X_4$.
5. Trouver la fonction caractéristique de X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
6. Quelle est la loi de la variable aléatoire $|X_1X_2 + X_3X_4|$? Trouver sa fonction caractéristique.

Exercice 4 Soient U_n, V_n, $n \geq 1$ deux suites de v.a. telles que $P\{V_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0\} = 1.$ et la suite U_n, $n \geq 1$, converge en loi, lorsque $n \to +\infty$ vers une probabilité μ sur $\mathbb{R}$. Etablir que $U_n + V_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \mu$ en loi.

Exercice 5
Soit $X_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une suite de v.a.i.id. de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On notera $U_n = \sum_{i=1}^n X_n^2$
On considère, par ailleurs, une suite de v.a.i.id. $V_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $n = 1, \dots, N$ de loi exponentielle de moyenne $E(V_1) = 2$ et on note $S_n = V_1 + \cdots + V_n$, $n \geq 1$.
1.- Calculer les transformées de Laplace $E(exp(-aV_1))$ et $E(exp(-aU_2))$, $a \geq 0$.
2.-En déduire l'expression de la densité de la loi de la variable aléatoire U_2.
3.- Soit $k \geq 1$. Calculer les transformées $E(exp(-aS_k))$ et $E(exp(-aU_{2k}))$, $a \geq 0$.
4.- Montrer que $U_{2k} \overset{(loi)}{=} S_k$.

Exercice 6 Soient X et ϵ deux v.a. indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(0,1)$ et $P_\epsilon = (\delta_1 + \delta_{-1})/2$. Soit $a > 0$. On pose $Y = X1_{\{|X| \geqslant a\}} - X1_{\{|X|<a\}}$ et $Z = \epsilon X$.
1. Montrer que Y, Z sont des v.a. de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
2. Montrer qu'aucun des vecteurs $(X,Y), (Y,Z), (X,Z)$ n'est gaussien.
Indication : Considérer la probabilité que la somme des coordonnées soit nulle.

Exercice 7 Soient X, Y deux v.a. indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$
1. Soit $Z = \max(X,Y)$. Calculer $E(Z)$
2. Soit $T = X/Y$. Montrer que T suit la loi de Cauchy et en déduire que T et $1/T$ ont même loi et que $E\left(\frac{|T|}{1+|T|}\right) = \frac{1}{2}$.

Exercice 8 Soient X_1, X_2, X_3 trois v.a. indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et

$$V = (X_1 + X_2 + X_3, X_1 - X_2, X_2 - X_3, X_3 - X_1)$$

1 Calculer la loi du vecteur V.
2. En déduire que les v.a. $X_1 + X_2 + X_3$ et $(X_1 - X_2)^2 + (X_2 - X_3)^2 + (X_3 - X_1)^2$ sont indépendantes.

Exercice 9 Soient X_1, X_2, X_3 trois v.a. indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $Y = (Y_1, Y_2, Y_3) = (X_1 - 2X_2, X_1 + X_2 + X_3, X_2 - X_3)$
1 Calculer la loi du vecteur Y.
2. Calculer la loi de $T = Y_2^2/3 + Y_3^2/2$.

Exercice 10

Soit (X_1, X_2, X_3) un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(m, \Gamma)$ avec $m = (2, -1, 1)$ et $\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$. Calculer la loi de $Y = (X_1 - X_2 + X_3, 2X_2 - X_3, X_1 + X_2 - 2X_3)$.

Exercice 11

Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de v.a. réelles indépendantes de loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer la limite en loi de la suite

$$Y_n = \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{k=1}^{n} k\ X_k.$$

Exercice 12

Soient X, Y, Z des v.a. i.i.d. de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On définit

$$U = \frac{X + YZ}{\sqrt{1+Z^2}}.$$

Montrer que U et Z sont i.i.d.

Exercice 13 Extrait d'un CC

Soit (X_1, X_2, X_3) un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(m, \Gamma)$ avec $m = (1,1,1)$ et $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Soit $Y = (Y_1, Y_2, Y_3) = (X_1, X_2 - X_1, X_3 - X_2)$.

1. Calculer, si elle existe, la densité de la loi de la variable aléatoire X_1.
2. Calculer la matrice de covariance du vecteur Y.
3. Les variables $Y_1 = X_1$ et $Y_2 = X_2 - X_1$ sont elles indépendantes ?
4. Calculer, si elle existe, la densité de la loi du vecteur aléatoire (X_1, X_2).
5. Soient $a > 0$ et (N_1, N_2, N_3) des variables indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que $P\left[\max(|N_1|, |N_2|, |N_3|) \leqslant a\right] \leqslant a^3$.
6. Soient $a > 0$ et $T = \max(|X_1 - 1|, |X_2 - X_1|, |X_3 - X_2|)$. Montrer que : $P(T \leqslant a) \leqslant a^3$.