Université Claude Bernard — Licence Math Eco
Année universitaire 2018-2019 — Probabilités 5 S6

Feuille de TD 3 : Chaînes de Markov.

Exercice 1

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov associée à une matrice de transition P sur un ensemble d'états S.

1. Soit $r \in \mathbb{N}$. Est-ce que $(X_{r+n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov ?
2. Est-ce que $(X_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov ?
3. Est-ce que $((X_n, X_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov ?

En cas de réponse positive, on précisera quelle est la matrice de transition.

Exercice 2

Soit la chaine de Markov de matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Classifier les états (c'est-à-dire, dans le cas fini : trouver les classes irréductibles, les états récurrents et transitoires).

Exercice 3

Soit une chaîne de Markov assiociée à une matrice de transition P sur un ensemble d'états S. On suppose qu'il existe un état absorbant s (i.e. $P(s,s) = 1$) et que pour tout $x \in S, x \rightsquigarrow s$. Classifier les états.

Exercice 4

Soit la chaine de Markov de matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Classifier les états.

Exercice 5 On considère la chaîne de Markov sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, 10\}$ donnée par la matrice de transition suivante (les éléments nuls ne sont pas indiqués). Classifier les états.

$Q =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1							0.5		0.5	
2		0.9		0.1						
3					0.2			0.8		
4		1								
5		0.2	0.2	0.2	0.2					0.2
6	0.4				0.6					
7	0.1								0.9	
8			1							
9							0.5		0.5	
10										1

Exercice 6 Soit $p \in]0,1[$, et considérons la chaîne de Markov d'espace d'états $\mathbb{Z}$ et de matrice de transition

$$P(i,j) = \begin{cases} p & \text{si } j = i+1 \\ 1-p & \text{si } j = i-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette chaîne est-elle irréductible ? Classifier les états (selon la valeur de p).

Exercice 7 On considère la chaîne de Markov sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ donnée par la matrice de transition suivante.

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Montrer que cette chaîne est irréductible récurrente.
2. Calculer la mesure de probabilité invariante.

Exercice 8

Soit $S = \{1, \ldots, 6\}$. Compléter la matrice suivante pour qu'elle soit une matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} \cdot & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & \cdot & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & \cdot \end{bmatrix}.$$

Classifier les états et montrer qu'il existe deux ensembles fermés irréductibles non vides C_1, C_2. Pour $i = 1, 2$ et $x \in S$, calculer

$$\mathbf{P}_x(X_n \in C_i \text{ pour tout } n \text{ assez grand}).$$

Exercice 9 Sur l'ensemble $S = \{0, 1, \ldots, n\}$ on considère la chaîne de Markov de matrice de transition P donnée pour $0 \leqslant x \leqslant n-1$ par

$$P(x, y) = \begin{cases} p & \text{si } y = x+1 \\ 1-p & \text{si } y = 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

l'état n étant absorbant (i.e. $P(n, x) = \delta_{n,x}$). Classifier les états de cette chaîne. Soit τ le temps d'atteinte de l'état n. Quelle est la valeur de $\mathbf{E}_x\tau$?

Application : combien de lancers d'un dé à 6 faces faut-il faire en moyenne pour voir apparaître 4 fois consécutivement le nombre 6 ?

Exercice 10 Marche aléatoire sur un graphe

Un graphe fini est donné par un couple (S, A), où S est un ensemble fini (l'ensemble des sommets du graphe) et A (l'ensemble des arêtes du graphe) est un sous-ensemble de $\mathscr{P}_2(S)$ (ici $\mathscr{P}_2(S)$ désigne l'ensemble des parties de S contenant exactement deux éléments).

Le degré d'un sommet $s \in S$ est défini comme le nombre d'arêtes auquel il appartient

$$d_s = \operatorname{card}\{a \in A \text{ t.q. } s \in a\}.$$

On définit une matrice de transition P sur l'ensemble d'états S en posant

$$P(s, t) = \begin{cases} 1/d_s & \text{si } \{s, t\} \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On suppose que la chaîne de Markov associée est irréductible. Quelle est la mesure de probabilité invariante μ ? (**Indication** : exprimer $\mu(s)$ en fonction de d_s.)

Application : une piéce d'échecs part du coin d'un échiquier (de 8×8 cases) et se déplace au hasard (à chaque étape, elle effectue un mouvement choisi selon la loi uniforme sur l'ensemble des mouvements possibles : à savoir le roi se déplace sur les 8 cases voisines, la tour horizontalement et verticalement, le fou en diagonales, la reine selon l'union des déplacements de la tour et du fou, un cavalier en L de 2 dans un sens horizontal ou vertical puis 1 dans l'autre vertical ou horizontal respectivement). Quel est le nombre moyen de déplacements avant qu'elle retourne à sa case de départ

1. si la piéce est un roi ?
2. si la piéce est une reine ?
3. si la piéce est un cavalier ?
4. si la piéce est un fou ?
5. si la piéce est une tour ?