Feuille de TD 4 : Chaîne de Markov, Processus de Poisson

Exercice 1 Soit $p \in]0,1[$, et considérons $(X_n)_{n\geqslant 0}$ la chaîne de Markov d'espace d'états $\mathbb{N}$ et de matrice de transition P avec $(P_{i,j})_{i,j\in[\![0,4]\!]} = Q$ est donnée par la matrice suivante :

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

et $P(5,0) = 1-p, P(5,6) = p$ et pour $i > 5, j \geqslant 5$

$$P(i,j) = \begin{cases} p & \text{si } j = i+1 \\ 1-p & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Toutes les autres transitions sont nulles

1. Classifier les états (c'est-à-dire : trouver les classes irréductibles, les états transitoires et les états récurrents).
2. La chaîne a-t-elle des mesures de probabilité invariantes ? Si oui calculer ces mesures de probabilité invariantes.
3. Calculer $E_2(\tau_4), E_2(\tau_3)$ où τ_n est le temps d'atteinte de $\{n\}$.
4. Soit $\tau_R = \inf\{n \geqslant 1 X_n \in R\}$ où R est l'ensemble des états récurrents. Montrer que $P_5(\tau_R < +\infty) = 1-p \in]0,1[$, $P_3(\tau_R < +\infty) = 1$, et $P_k(\tau_R < +\infty) = 0$ pour $k \geqslant 6$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $E_n(\tau_R)$.

Exercice 2

Soit N_t un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$. Calculer $Cov(N_t, N_s)$ pour $s,t \geqslant 0$.

Exercice 3 **Une définition équivalente** Soit un processus de comptage $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ (c'est-à-dire un processus p.s. croissant à valeur entière partant de $N_0 = 0$).

1. Montrer que si N_t est un processus de Poisson, alors $\lim_{h\to 0^+} \frac{P(N_h \geqslant 2)}{h} = 0$.
2. Réciproquement, on suppose à partir de maintenant que N_t est à accroissements stationnaires et indépendants, non trivial (à savoir, non p.s. nul soit $\exists t > 0 P(N_t > 0) > 0$), et

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{P(N_h \geqslant 2)}{h} = 0.$$

   Montrer que pour tout $t \geqslant 0$:

$$\lim_{h\to 0^+} P(N_{t+h} - N_t \geqslant 1) = 0.$$

3. Soit $B_n = \{\exists j \in [1, 2^n] : N_{j/2^n} - N_{(j-1)/2^n} \geqslant 2\}$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = 0.$$

   En déduire que N_t est un processus de Poisson.

Exercice 4

Soit Y_n un processus de Bernoulli de probabilité de transition $P(Y_1 = k|Y_0 = k-1) = p \in]0,1[, k > 0$ partant de $Y_0 = 0$ et X_0 une variable indépendante de loi $P_{X_0} = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})$. On pose $X_n = X_0(-1)^{Y_n}$. Montrer que X_n est une chaîne de Markov, classifier ces états.

Exercice 5

Soit N_t un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ et X_0 une variable indépendante de loi $P_{X_0} = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})$. On pose $X_t = X_0(-1)^{N_t}$. Calculer $E(X_t)$ puis $Cov(X_t, X_s)$ pour $s, t > 0$.

Exercice 6

Des greffons arrivent à un bloc opératoire suivant un Processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$. Un premier malade en liste d'attente a une espérance de vie sans greffe suivant une loi exponentielle de paramètre $\mu_1 > 0$ et un second malade en liste d'attente à une espérance de vie sans greffe suivant une loi exponentielle de paramètre $\mu_2 > 0$. Le premier patient est toujours greffé en premier si il est encore en vie à l'arrivée du greffon.

1. Calculer la probabilité que le premier patient reçoive une greffe.
2. Montrer que la probabilité que le second patient reçoive un greffe est
$$p_2 = \frac{\lambda(\mu_1 + \lambda)}{(\mu_2 + \lambda)(\mu_1 + \mu_2 + \lambda)}.$$
3. Calculer la loi du nombre Z de greffons qui arrivent pendant l'espérance de vie du premier patient.

Exercice 7

Les employés d'une entreprise arrivent au travail selon un processus de Poisson N_t d'intensité $\lambda > 0$. Soit S_n le temps d'arrivée du n-ème employé.

1. Montrer que le temps de travail dans l'entreprise à l'instant t est $X_t = \sum_{k=1}^{N_t}(t - S_k)$.
2. Montrer que la loi de S_k sachant $N_t = n$ pour $k \leqslant n$ admet pour densité $f_{S_k, N_t = n}(s) = \frac{n! s^{k-1}(t-s)^{n-k}}{t^n (k-1)!(n-k)!} 1_{[0,t]}(s)$
3. Montrer $E[\sum_{k=1}^{N_t} S_k | N_t = n] = \frac{nt}{2}$.
4. En déduire $E(X_t|N_t) = \frac{tN_t}{2}$ puis que $E(X_t) = \frac{\lambda t^2}{2}$.

Exercice 8 Paradoxe de l'inspection

On change des ampoules indépendantes ayant une durée de vie exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. La première ampoule, de durée de vie T_1 est allumée à l'instant 0, chaque ampoule est ensuite remplacée (instantanément) lors de l'extinction de la précédente. La durée de vie de la n-ième ampoule est T_n. Soit $S_n = T_1 + ... + T_n$ la marche aléatoire associée.

1. Rappeler pourquoi le nombre d'ampoules consommés à l'instant t est un processus de Poisson N_t d'intensité $\lambda > 0$.
2. Montrer que $N_t + 1$ est un temps d'arrêt adapté à la filtration engendré par la suite $(T_n)_{n \geqslant 1}$.
3. Montrer que $P(t - S_{N_t} > s) = e^{-\lambda s}$ si $s \leqslant t$ et 0 sinon
(Indication : utiliser ex 7.2 ou montrer que $P(S_{N_t} > t-s) = P(N_{t-s} = N_t)$). En déduire $E(t - S_{N_t})$.
4. Montrer que $S_{N_t+1} - t$ suit un loi exponentielle de paramètre λ
(Indication : Montrer que $P(S_{N_t+1} - t > s) = P(N_{t+s} = N_t)$).
5. Montrer que $S_{N_t+1} - t$ et $t - S_{N_t}$ sont indépendants.
6. Montrer que l'espérance de vie d'une ampoule inspectée à l'instant t, est $E(T_{N_t+1}) = \frac{2 - e^{-\lambda t}}{\lambda}$ et la comparer à $E(T_1)$.

Exercice 9

Soit N_t un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit S_n le temps de n-ième arrivée d'une vague. On suppose que la hauteur de la n-ème vague contribue est $A_k e^{-\alpha t}$ après un temps t suivant son arrivée avec les variables A_k l'amplitude initiale de la vague k sont des variables i.i.d. et d'espérance $E(A_1) < \infty$.

La hauteur cumulée des vagues à l'instant t est donc $A_t = \sum_{k=1}^{N_t} A_k e^{-\alpha(t - S_k)}$.

1. Calculer $E(A_t | N_t = n)$.
2. Calculer $E(A_t)$.