Feuille de TD 5 : Mouvement Brownien.

Exercice 1

Soient $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Z_t = \sqrt{t}Z$ pour $t \geqslant 0$. Est-ce que $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus gaussien ? Est-ce un mouvement brownien ?

Exercice 2

Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien.

1. Montrer que pour P un polynôme $E(B_t P(B_t)) = tE(P'(B_t))$.
2. Calculer $E(B_t^4)$ pour $t > 0$.
3. Calculer $E(B_t^2 B_s^2)$ pour $t > s$.
4. Calculer $E(B_t^4 B_s^2)$ pour $t > s$.

Exercice 3 Variation quadratique du mouvement brownien.

Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien. On pose, pour $n \geqslant 0$,

$$X_n = \sum_{n=1}^{2^n} (B_{k/2^n} - B_{(k-1)/2^n})^2.$$

Calculer la moyenne et la variance de X_n.

Exercice 4 Soient $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien et $t > s > r > 0$.

1. Calculer $\mathbf{E}(B_t|B_s)$
2. Calculer $\mathbf{E}((B_t)^2|B_s)$.
3. Calculer $\mathbf{E}(exp(ixB_t)|B_s)$.
4. Calculer $\mathbf{E}(B_s|B_t)$.
5. Calculer $\mathbf{E}(B_s^2|B_t)$.
6. Calculer $\mathbf{E}(exp(ixB_s)|B_t)$.
7. Calculer $\mathbf{E}(B_s|\sigma(B_t, B_r))$.
8. Calculer $\mathbf{E}(B_s^2|\sigma(B_t, B_r))$.
9. Calculer $\mathbf{E}(exp(ixB_s)|\sigma(B_t, B_r))$.

Exercice 5 Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien. On pose $V_0 = 0$, et pour $t > 0$, $V_t = tB_{1/t}$.

1. Montrer que $(V_{t+s} - V_s)_{t\geqslant 0}$ est un mouvement brownien.
2. Montrer $P(|V_{1/n}| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{3}{\epsilon^4 n^2}$ en déduire que $P(V_{1/n} \to_{n\to\infty} 0) = 1$ Que manque t-il pour montrer que (V_t) est un mouvement brownien ?
3. Montrer que pour tout $(s,t) \in [0, \infty[^2$, $\mathbf{E}(B_s B_t^2) = 0$.
4. On montre le résultat manquant plus difficile dans cette question. En utilisant le résultat du cours que $\sup_{s\in]0,t[} B_s$ a même loi que $|B_t|$ déduire que pour $t \leqslant 1/n$,

$$P(\sup_{s\in]0,1/n-t[} (V_{s+t} - V_t) \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{3}{\epsilon^4 n^2},$$

puis en prenant $t = 1/m$ montrer que $\sup_{s\in]1/m,1/n[}(V_s - V_{1/m}) \to_{m\to\infty} \sup_{s\in]0,1/n[} V_s p.s.$. En déduire que

$$P(\sup_{s\in]0,1/n[} |V_s|) \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{6}{\epsilon^4 n^2}$$

et conclure que

$$P((\sup_{s\in]0,1/n[} |V_s| \to_{n\to\infty} 0) = 1.$$