

FEUILLE DE TD 5 : Mouvement Brownien.

Exercice 1

Soient $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $Z_t = \sqrt{t}Z$ pour $t \geq 0$. Est-ce que $(Z_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien? Est-ce un mouvement brownien?

Exercice 2

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien.

1. Montrer que pour P un polynôme $E(B_t P(B_t)) = tE(P'(B_t))$.
2. Calculer $E(B_t^4)$ pour $t > 0$.
3. Calculer $E(B_t^2 B_s^2)$ pour $t > s$.
4. Calculer $E(B_t^4 B_s^2)$ pour $t > s$.

Exercice 3 Variation quadratique du mouvement brownien.

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien. On pose, pour $n \geq 0$,

$$X_n = \sum_{k=1}^{2^n} (B_{k/2^n} - B_{(k-1)/2^n})^2.$$

Calculer la moyenne et la variance de X_n .

Exercice 4 Soit $(S_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien géométrique de volatilité σ et taux d'intérêt moyen μ . Calculer $E(S_t)$, $Var(S_t)$, $Cov(S_t, S_T)$ pour $t < T$.

Exercice 5 Soient $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien et $t > s > r > 0$.

1. Calculer $\mathbf{E}(B_t | B_s)$
2. Calculer $\mathbf{E}((B_t)^2 | B_s)$.
3. Calculer $\mathbf{E}(\exp(ixB_t) | B_s)$.
4. Calculer $\mathbf{E}(B_s | B_t)$.
5. Calculer $\mathbf{E}(B_s^2 | B_t)$.
6. Calculer $\mathbf{E}(\exp(ixB_s) | B_t)$.
7. Calculer $\mathbf{E}(B_s | \sigma(B_t, B_r))$.
8. Calculer $\mathbf{E}(B_s^2 | \sigma(B_t, B_r))$.
9. Calculer $\mathbf{E}(\exp(ixB_s) | \sigma(B_t, B_r))$.
10. Calculer $\mathbf{E}((B_s)^2 + (B_t)^2 | B_r)$.
11. Calculer $\mathbf{E}((B_s)^2 (B_t)^2 | B_r)$.
12. Calculer $\mathbf{E}(\exp(-(B_s)^2 - (B_t - B_s)^2) | B_r)$.

Exercice 6 Soient $T > t > r > 0$ et $(S_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien géométrique de volatilité σ et taux d'intérêt moyen μ . Calculer $E(S_t | S_r)$, $E(S_t | S_T)$ et $E(S_t S_T | S_r)$.

Exercice 7 Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien. On pose $V_0 = 0$, et pour $t > 0$, $V_t = tB_{1/t}$.

1. Montrer que $(V_{t+s} - V_s)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien.
2. Montrer $P(|V_{1/n}| \geq \epsilon) \leq \frac{3}{\epsilon^4 n^2}$ en déduire que $P(V_{1/n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0) = 1$ Que manque-t-il pour montrer que (V_t) est un mouvement brownien?
3. Montrer que pour tout $(s, t) \in [0, \infty]^2$, $\mathbf{E}(B_s B_t^2) = 0$.

4. On montre le résultat manquant plus difficile dans cette question. En utilisant le résultat du cours que $\sup_{s \in]0, t[} B_s$ a même loi que $|B_t|$ déduire que pour $t \leq 1/n$,

$$P\left(\sup_{s \in]0, 1/n-t[} (V_{s+t} - V_t) \geq \epsilon\right) \leq \frac{3}{\epsilon^4 n^2},$$

puis en prenant $t = 1/m$ montrer que $\sup_{s \in]1/m, 1/n[} (V_s - V_{1/m}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sup_{s \in]0, 1/n[} V_s p.s..$ En déduire que

$$P\left(\sup_{s \in]0, 1/n[} |V_s| \geq \epsilon\right) \leq \frac{6}{\epsilon^4 n^2}$$

et conclure que

$$P\left(\left(\sup_{s \in]0, 1/n[} |V_s| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0\right)\right) = 1.$$