Université Claude Bernard — L2 Mathématiques

Probabilités discrètes — 2019-2020

Corrigé du contrôle continu 1 du mardi 25 février 2020

Durée : 1 heure 15

Première partie

Question de cours (4 points) :

1. *Donner la formule pour le cardinal de l'ensemble des applications entre deux ensembles finis A et B.*

   L'ensemble des applications de A dans B est noté B^A, son cardinal est

   $$\operatorname{card}(B^A) = \big(\operatorname{card}(B)\big)^{\operatorname{card}(A)}.$$

   La correctrice a trop souvent lu des formules qui ne donnaient pas la réponse à la question posée. Lisez bien les questions !

2. *Soit $N > 2$. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité fini et X, $X_1, \dots, X_N$ des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$.*

   (a) *On suppose que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Décrire la loi de X et faire la preuve du calcul de l'espérance de X.*

   Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, alors $X : \Omega \to [\![0,n]\!]$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

   Décrire la loi de X, c'est donner l'ensemble des valeurs prises par X ainsi que les probabilités $\mathbb{P}(X = k)$ pour ces valeurs.

   On peut ajouter que X donne le nombre de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès est p.

   Attention, trop souvent quand vous avez voulu décrire cette situation, vous avez décrit l'expérience mais pas la variable aléatoire X, qui à chaque réalisation associe le nombre de succès obtenus.

   On calcule l'espérance de X :

   $$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k \ \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{(le terme pour } k = 0 \text{ est nul)}\end{aligned}$$

   Ensuite, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a

   $$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

On réinjecte dans la somme précédente et on fait le changement d'indice $j = k - 1$ (ce qui revient à écrire $k = j + 1$) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k} \\
&= np\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}p^j(1-p)^{n-1-j} \\
&= np\left(p+(1-p)\right)^{n-1} \qquad \text{(en utilisant le binôme de Newton)} \\
&= np.
\end{aligned}$$

Il faut dire que vous utilisez la formule du binôme de Newton, ou au moins écrire la formule de l'avant-dernière ligne.

(b) *Donner la définition de l'indépendance de $X_1, \dots, X_N$.*

Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_N$ sont indépendantes si pour tout $s_1 \in X_1(\Omega), \dots,$ $s_N \in X_N(\Omega)$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N}\{X_k = s_k\}\right) = \prod_{k=1}^{N}\mathbb{P}(X_k = s_k)$.

On définit ici l'indépendance de variables aléatoires et non d'évènements, $X_1 \cap X_2$ n'a pas de sens pour deux variables aléatoires.

Exercice 1 (6 points)

Une urne contient 5 boules :

- 1 boule bleue numérotée 0,
- 2 boules blanches numérotées 1,
- 2 boules rouges numérotées 2.

On tire au hasard une première boule. On remet la boule prélevée, puis on tire au hasard une deuxième boule (indépendamment).

1. *Décrire l'espace des réalisations Ω et la probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω correspondant à l'expérience.*

   Plusieurs choix sont possibles.

   On va considérer qu'on ne distingue que la couleur, qui est numérotée 0, 1 ou 2. On effectue deux tirages avec remise donc l'espace des réalisations est

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{0,1,2\}^2 = [\![0,2]\!]^2 \\
&= \Big\{(j,k) \colon j \in \{0,1,2\}, k \in \{0,1,2\}\Big\}.
\end{aligned}$$

   Dans ce cas, les éléments de Ω ne sont pas équiprobables puisqu'il n'y a pas le même nombre de boules de chaque couleur. Il faut définir la probabilité sur Ω, c'est-à-dire $\mathbb{P}(\{(j,k)\})$ pour tout $(j,k) \in \Omega$.

   Pour cela, on utilise le fait que les deux tirages sont indépendants et qu'à chaque tirage la probabilité de tirer une boule bleue est de $1/5$, celle de tirer une boule blanche est de $2/5$ et celle de tirer une boule rouge est de $2/5$ (nombre de boules de la couleur divisé par le nombre total de boules).

Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\{(0,0)\}) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25} \\
&\mathbb{P}(\{(0,1)\}) = \mathbb{P}(\{(0,2)\}) = \mathbb{P}(\{(1,0)\}) = \mathbb{P}(\{(2,0)\}) = \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{25} \\
&\mathbb{P}(\{(1,1)\}) = \mathbb{P}(\{(1,2)\}) = \mathbb{P}(\{(2,1)\}) = \mathbb{P}(\{(2,2)\}) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}
\end{aligned}$$

Une autre modélisation est possible. On peut considérer qu'on peut distinguer les 5 boules. Pour cela, on note B_0 la boule bleue, B_1 et B_1' les boules blanches, R_2 et R_2' les boules rouges. On effectue deux tirages avec remises donc l'espace des réalisations est

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \{B_0, B_1, B_1', R_2, R_2'\}^2 \\
&= \Big\{(a,b) \colon a \in \{B_0, B_1, B_1', R_2, R_2'\}, b \in \{B_0, B_1, B_1', R_2, R_2'\}\Big\}.
\end{aligned}$$

Dans ce cas, tous les éléments de Ω_1 sont considérés comme équiprobables. On munit Ω_1 de la probabilité uniforme : pour tout $(a,b) \in \Omega_1$, $\mathbb{P}(\{(a,b)\}) = \frac{1}{|\Omega_1|} = \frac{1}{36}$.

La correctrice a souvent lu que l'espace des réalisations était $\{0,1,1,2,2\}^2$. On voit bien que vous avez voulu distinguer les 5 boules, mais l'ensemble $\{0,1,1,2,2\}$ est égal à l'ensemble $\{0,1,2\}$. Attention !
Autre point : définir une probabilité sur Ω ce n'est pas écrire $\mathbb{P}(\Omega) = 1$!!

2. *On note X la variable aléatoire associant à chaque réalisation le numéro de la première boule tirée, et Y la variable aléatoire associant à chaque réalisation le numéro de la deuxième boule tirée.*

   (a) *Calculer $\mathbb{P}(X = 1)$.*

   On peut simplement dire qu'il y a deux boules blanches parmi les 5 boules donc la probabilité que la première boule soit blanche est $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{5}$.

   On peut aussi écrire : $\{X = 1\} = \Big\{(1,0), (1,1), (1,2)\Big\}$ donc

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\{(1,0)\}) + \mathbb{P}(\{(1,1)\}) + \mathbb{P}(\{(1,2)\}) = \frac{2}{25} + \frac{4}{25} + \frac{4}{25} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}.$$

   (b) *Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$.*

   Les valeurs prises par X sont $\{0,1,2\}$. Comme à la question précédente, on obtient $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{5}$ et $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{2}{5}$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{2} k\, \mathbb{P}(X = k) &= 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X = 1) \\
&= 1 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}.
\end{aligned}$$

   Quand vous utilisez une formule, il faut l'écrire, au moins sous l'une des deux formes (avec le Σ ou développée). Même remarque pour la question suivante !!

   (c) *Calculer $\mathbb{E}(X^2)$.*

   On utilise la formule de transfert, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{2} k^2\, \mathbb{P}(X = k) &= 0^2 \cdot \mathbb{P}(X = 0) + 1^2 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 2^2 \cdot \mathbb{P}(X = 1) \\
&= 1^2 \times \frac{2}{5} + 2^2 \times \frac{2}{5} = 2.
\end{aligned}$$

(d) *Calculer la probabilité que les boules tirées soient de même couleur* $\mathbb{P}(X = Y)$.
L'évènement $\{X = Y\}$ s'écrit $\{X = Y\} = \Big\{(0,0),(1,1),(2,2)\Big\}$ donc

$$\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}(\{(0,0)\}) + \mathbb{P}(\{(1,1)\}) + \mathbb{P}(\{(2,2)\}) = \frac{1}{25} + \frac{4}{25} + \frac{4}{25} = \frac{9}{25}.$$

Si l'on préfère, on peut écrire (c'est la même chose) :

$$\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 2).$$

Si cela n'a pas été fait avant, c'est le moment pour calculer proprement les quantités $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0)$, $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1)$, $\mathbb{P}(X = 2, Y = 2)$ en utilisant l'indépendance. On écrit donc par exemple $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0)$ puis on dit que la loi de Y est la même que celle de X, d'où

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}.$$

(e) *Calculer* $\mathbb{E}(X + Y)$.
L'indépendance est linéaire donc $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.
De plus, Y a la même loi que X (il y a remise) donc $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)$.
Ainsi, $\mathbb{E}(X + Y) = 2\,\mathbb{E}(X) = \frac{12}{5}$.
Attention, la formule $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ est toujours vraie, pas besoin d'indépendance ici.