Université Claude Bernard — Mathématiques
L2 **Probabilités discrètes et Statistiques descriptives** — 2017-2018

Contrôle continu du Mardi 27 février 2018

Durée : 1 heure 15.

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin à JUSTIFIER les réponses aux exercices.

On rappelle que $\binom{n}{k} = C_n^k$ sont les coefficients binomiaux.
Question de Cours (10 minutes maxi, 5 points) :

1. Donner la formule de Poincaré (aussi appelée principe d'inclusion-exclusion ou formule du crible) pour la probabilité de l'union de n évènements $P(A_1 \cup ... \cup A_n)$ dans le cas général ET le cas $n = 3$.
2. Décrire la loi de Poisson $P(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$. (Il faut donner les probabilités de tous les singletons de l'ensemble dénombrable de définition de la loi.)
3. Énoncer la théorème de sommation par paquet pour les familles sommables à termes positifs.
4. Soit $Z : \Omega \to \{-1, 1, 3\}$ une variable aléatoire avec $P(Z = 1) = P(Z = -1) = \frac{1}{3}$. Donner la définition puis calculer l'espérance $E(Z)$.

Exercice 1 (2 points + Bonus : 2 points)

1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ et $x_n, n \in \mathbb{N}$ une suite de E avec $x_0 \neq 0$. Montrer que le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par la suite :$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(x_n, n \in \mathbb{N})$ est infini et dénombrable.
2. **Bonus : 2 points** Montrer que l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{Q}$ $\mathbb{Q}(X)$ est infini et dénombrable. (on rappelle qu'une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes)

Exercice 2 (8 points) Attention à la longueur variable des mots de passes

1. Combien peut on construire de mots de passes en utilisant exactement 8 chiffres distincts (parmi les 10 chiffres) ? (Ex : 14582390)
2. Combien peut on construire de mots de passes en utilisant exactement 5 lettres majuscules DISTINCTES (parmi les 26 lettres) ET 5 chiffres (parmi les 10 chiffres de bases, non nécessairement distincts) ? (Ex : AB11D64C8 ou le mot de passe distinct ABD64C118)
3. Calculer le nombre de mots que l'on peut fabriquer avec les lettres du mot SOMMABILITÉ (en utilisant toutes les lettres, exactement le même nombre de fois sans importance de l'existence du mot dans aucune langue).
4. Combien peut on construire de mots de passes en utilisant exactement 8 chiffres (pas forcément distincts parmi les 10 chiffres) dont au moins 3 cinq ? (Ex : 15582597 ou 15555597)
5. Montrer que pour $1 \leq k \leq n$: $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ puis calculer la somme :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k}\binom{n}{k}.$$

Exercice 3 (5 points+ Bonus :2 points) Une urne contient 10 boules rouges numérotées de 1 à 10 et 5 boules vertes numérotées de 1 à 5. On tire SIMULTANÉMENT 6 boules au hasard.

1. Quel est l'espace des réalisations Ω ? Calculer le cardinal $Card(\Omega)$.
2. Quelle est la probabilité de tirer exactement 4 boules rouges ?
3. Quelle est la probabilité de tirer au moins 1 boule rouge ?
4. **(Bonus : 2 points)** Quelle est la probabilité d'obtenir des chiffres distincts (c'est-à-dire jamais à la fois un chiffre rouge et le même chiffre vert) ?