Université Claude Bernard — Mathématiques
L2 **Probabilités discrètes et Statistiques descriptives** — 2017-2018

Contrôle continu du Mardi 27 février 2018 : Correction

Question de Cours (10 minutes maxi, 5 points) :

1. **Total :1,5 points**. Donner la formule de Poincaré (aussi appelée principe d'inclusion-exclusion) pour la probabilité de l'union de n évènements $P(A_1 \cup ... \cup A_n)$ dans le cas général (1 point)

$$P(\cup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

   ET le cas $n = 3$: (0,5 points)

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

2. **Total :1 point**Décrire la loi de Poisson $P(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ (0,25 pour l'ensemble de def) la probabilité d'obtenir n est (OK aussi notation $P(X = n)$ si X v ;a. ; de loi de Poisson) (0,75 pour la formule)

$$P(\{n\}) = p_n = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

3. **Total :1,5 points** Énoncer la théorème de sommation par paquet pour les familles sommables à termes positifs. 1 point pour l'équivalence + 0,5 point pour l'égalité des sommes.

   Théorème 1. *(de sommation par paquets) Soit $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une partition de I. Une famille $(a_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si on a à la fois les deux propriétés suivantes :*

   (a) pour chaque $\lambda \in \Lambda$, $(a_i)_{i \in I_\lambda}$ est sommable, disons de somme σ_λ

   (b) et $(\sigma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est sommable.

   De plus, on a l'égalité :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{\lambda \in \Lambda} \sigma_\lambda \equiv \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{i \in I_\lambda} a_i \right).$$

4. **Total :1 point** Soit $Z : \Omega \to \{-1, 1, 3\}$ une variable aléatoire avec $P(Z = 1) = P(Z = -1) = \frac{1}{3}$. Donner la définition puis calculer l'espérance $E(Z)$. (0,5 point pour première ou deuxième formule, 0,5 point pour calcul)

$$E(Z) = \sum_{k \in \{-1,1,3\}} kP(Z = k) = P(Z = 1) - P(Z = -1) + 3P(Z = 3) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 3\frac{1}{3} = 1$$

   vu $P(Z = 3) = 1 - P(Z = 1) - P(Z = -1) = \frac{1}{3}$.

Exercice 1 (2 points + Bonus : 2 points)

1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ et $x_n, n \in \mathbb{N}$ une suite de E avec $x_0 \neq 0$. Montrons que le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par la suite :$F = \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(x_n, n \in \mathbb{N})$ est infini et dénombrable.

   On a $F = \cup_{k=1}^{\infty} F_k$ avec $F_k = \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(x_n, n = 0, ..., k)$. De plus $h : \mathbb{Q}^{k+1} \to F_k$ donnée par $h(q_0, ..., q_k) = \sum_{i=0}^{k} q_i x_i$ est une surjection et $\mathbb{Q}^{k+1}$ est dénombrable comme produit fini d'ensembles dénombrable (0,5 point), donc l'image de h F_k est au plus dénombrable (0,5 point). Par union dénombrable $F = \cup_{k=1}^{\infty} F_k$ est au plus dénombrable (0,5 point).
   Enfin, comme $x_0 \neq 0, \mathbb{Q}x_0 \simeq \mathbb{Q}$ est infini, donc $F \supset \mathbb{Q}x_0$ est aussi infini. (0,5 point)

2. **Bonus : 2 points** Montrons que l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(X)$ est infini et dénombrable. (Rappel : une fraction rationnelle est le quotient de 2 polynômes)
   D'abord l'ensemble des polynômes$\mathbb{Q}[X] = Vect_{\mathbb{Q}}\{X^n, n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable par la question 1, donc $\mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{Q}(X)$ infinis (0,5 point $\mathbb{Q}[X]$ dénombrable, 0,5 point $\mathbb{Q}(X)$ infini, même chose si on redémontre comme en TD).
   En plus, on a une surjection $f : \mathbb{Q}[X] \times \mathbb{Q}[X] - \{0\} \to \mathbb{Q}(X)$ donnée par $f(P, Q) = P/Q$ par définition d'une fraction rationnelle et $\mathbb{Q}[X] \times \mathbb{Q}[X] - \{0\}$ est dénombrable comme produit d'ensemble dénombrable (0,5 point) donc par image par une surjection, $\mathbb{Q}(X)$ est dénombrable (0,5 point).

Exercice 2 (8 points) Attention à la longueur variable des mots de passes

1. **(1 point)**Combien peut on construire de mots de passes en utilisant exactement 8 chiffres distincts (parmi les 10 chiffres) ? (Ex : 14582390) C'est un tirage de 8 éléments ordonnés distincts parmi 10, c'est donc un arrangement de 8 éléments parmi 10. Nombre de choix : $A_{10}^8 = \frac{10!}{2!}$. (0,5 pour explication/arrangement A_{10}^8, 0,5 pour formule $\frac{10!}{2!}$ ou $10 \times 9... \times 3$)

2. **(2 points)**Combien peut on construire de mots de passes en utilisant exactement 5 lettres majuscules DISTINCTES (parmi les 26 lettres) ET 5 chiffres (parmi les 10 chiffres de bases, non nécessairement distincts) ? (Ex : AB11D64C8E ou le mot de passe distinct ABD64C118E)
   Il y a 10^5 choix de chiffres (arrangements avec répétitions 0,5 points) et comme au dessus $A_{26}^5 = 26.25.24.23.22$ choix de lettres (0,5 points). Enfin il y a $C_{10}^5 = \frac{10!}{(5!)^2}$ choix des positions des chiffres (ensemble des positions, qui détermine les positions des lettres) (0,5 points). la Réponse finale est le produit (0,5 point) :

$$10^5 C_{10}^5 A_{26}^5 = 26.25.24.23.22.10^5.\frac{10!}{(5!)^2}$$

3. **(1 point)** Calculons le nombre de mots que l'on peut fabriquer avec les lettres du mot SOMMABILITÉ (en utilisant toutes les lettres, exactement le même nombre de fois sans importance de l'existence du mot dans aucune langue). Il s'agit d'un arrangement avec répétition de 2M, 2I, 1S, 1 O, 1A, 1 B, 1L, 1T, 1 É(total 11 lettres) soit d'après le cours le nombre de possibles :

$$\frac{11!}{(2!)^2(1!)^6} = \frac{11!}{4}.$$

4. **(2 points)** Combien peut on construire de mots de passes en utilisant exactement 8 chiffres (pas forcément distincts parmi les 10 chiffres) dont au moins 3 cinq ? (Ex : 15582597 ou 15555597)
   Soit A l'ensemble de ces mots de passe, le complémentaires A^c est l'ensemble des MdP contenant 0 ou 1 ou 2 cinq. Il y a 9^8 mots ne contenant aucun 5 (0,25 points) et 8.9^7 contenant

exactement un cinq (8 positions du 5, et 9^7 choix des autres chiffres, 0,5 points). Enfin il y a 28.9^6 mots de passe avec exactement 2 cinq ($C_2^8 = 8.7/2 = 28$ positions fois 9^6 choix des autres chiffres, 0,5 points). Par complémentaire et union disjointe vu le nombre total de 10^8 MdP (0,25 points pour nombre total) (résultat : 0,5 points) :

$$Card(A) = 10^8 - Card(A^c) = 10^8 - 9^8 - 8.9^7 - 28.9^6.$$

5. **(2 points)** Montrons que pour $1 \leq k \leq n$: $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. En effet (1 point) :

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Calculons la somme (on utilise la formule précédente pour la première égalité, le changement d'indice $l = k-1$ au deuxième et enfin la formule du binôme) (1 point dont 0,5 pour binôme, 0,5 pour le reste) :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k}\binom{n}{k} = n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{3}\sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{3^l}\binom{n-1}{l} = \frac{n}{3}(1+\frac{1}{3})^{n-1} = \frac{n4^{n-1}}{3^n}.$$

Exercice 3 (5 points+ Bonus :2 points) Une urne contient 10 boules rouges numérotées de 1 à 10 et 5 boules vertes numérotées de 1 à 5. On tire SIMULTANÉMENT 6 boules au hasard.

1. **2 points (1 point)** L'espace des réalisations est $\Omega = \mathcal{P}_6(\{R1, ...R10, V1, ..., V5\}) \simeq \mathcal{P}_6([\![1, 15]\!])$ l'ensemble des parties à 6 éléments de l'ensemble des 10 boules rouges et 5 boules vertes (car le tirage est simultané donc non-ordonné). (**1 point**) $Card(\Omega) = C_{15}^6 = \frac{15!}{9!6!}$
2. **2 points (dont 1 pour la formule $\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$ donné une fois dans tout l'exo)** L'ensemble A des tirages avec exactement 4 boules rouges a cardinal $C_{10}^4 C_5^2$. (tirage de 4 boules rouges parmi les 10 et 2 vertes parmi les 5) donc

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{C_{10}^4 C_5^2}{C_{15}^6}.$$

(On peut aussi utiliser la loi hypergéométrique)

3. **1 point** Soit l'ensemble B des tirages avec au moins 1 boule rouge. B^c est l'ensemble des tirages avec exactement aucune boule rouge tirée, qui est vide car on ne peut tirer que 5 boules vertes et qu'on tire 6 boules. Donc la probabilité

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - 0 = 1.$$

4. **2 points** Quelle est la probabilité d'avoir des chiffres distincts (c'est-à-dire jamais à la fois un chiffre rouge et le même chiffre vert) ? Soit D l'ensemble des tirages. Soit $D_i = D \cap \{on\ tire\ i\ boules\ vertes\}$. Alors $Card(D_i) = C_5^i C_{10-i}^{6-i}$ car on a C_5^i choix de i boules vertes parmi les 5 et une fois fixé celles-ci, il reste $10 - i$ boules rouges ayant d'autres numéros et on en tire $6 - i$ parmi elles. Comme $D = \cup_{i=0}^5 D_i$ et que l'union est disjointe, on trouve :

$$P(D) = \frac{\sum_{i=0}^5 C_5^i C_{10-i}^{6-i}}{C_{15}^6} = \frac{C_{10}^6 + 5C_9^5 + 10C_8^4 + 10C_7^3 + 5C_6^2 + C_5^1}{C_{15}^6}$$