Université Claude Bernard Mathématiques
L2 **Probabilités discrètes** 2018-2019

Correction du Contrôle continu 1 du mardi 26 février 2019

Durée : 1 heure 15

Des erreurs qu'on ne devrait pas lire...

- Certaines réponses aux exercices sont insensées, par exemple :
  - un cardinal qui n'est pas un entier ;
  - une probabilité strictement plus grande que 1 ;
  - par exemple, on a pu lire $P(\Omega) = |\Omega|$: est-ce bien raisonnable ?
  - un ensemble égal à un nombre (eh non ! un ensemble n'est pas égal à son cardinal !).
- Certaines réponses laissent le correcteur rêveur :
  - Il ne faudrait pas croire que l'on décrit une loi de probabilité en donnant seulement $P(\Omega)$ – qui vaut 1 dans n'importe quel espace probabilisé (Ω, P).
  - La probabilité d'un événement B n'est – sauf exception – pas égale à $\frac{1}{|B|}$ mais à $\frac{|B|}{|\Omega|}$.
  - Si X et Y sont des *éléments* de Ω, se demander quelle est la probabilité $P(X = Y)$ n'a aucun sens !
  - Dans l'exercice 2, le nombre de dispositions « qui alternent » est parfois plus grand que le nombre total de dispositions, c'est aberrant.
  - Dans l'exercice 3, où l'on s'intéresse à un couple de codes PIN, il n'est pas raisonnable de proposer pour espace des réalisations l'ensemble $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Cet ensemble décrit *un* chiffre d'*un* code !
    Pourquoi est-ce que si peu d'entre vous ont pris en compte qu'il y avait *deux* codes à considérer dans Ω ? Pourquoi est-ce qu'un quart à un tiers d'entre vous n'ont pas vu le mot « DISTINCTS », pourtant écrit en capitales ?

Question de cours (10 minutes maxi, 5 points)

1. Décrire la loi binomiale $B(n, p)$. (Il faut donner les probabilités de tous les singletons de l'ensemble fini de définition de la loi.)
2. Donner la définition d'une probabilité P sur un ensemble fini Ω.
3. Énoncer le théorème de transfert sur un espace de probabilité fini.
4. Énoncer la formule du multinôme.

Solution.

1. La loi binomiale $B(n, p)$ décrit la loi du nombre de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli (à deux issues possibles) indépendantes, chacune ayant une probabilité de succès de p. Elle dépend d'un entier naturel n et d'un réel $p \in [0, 1]$. L'ensemble des réalisations est $\Omega = \{0, 1, \ldots, n\}$. Pour tout $k \in \Omega$, on a :
$$P\big(\{k\}\big) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$
2. Une probabilité sur un ensemble fini Ω est une application P définie de l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\Omega)$ vers $[0, 1]$ telle que :
   (a) $P(\Omega) = 1$;
   (b) si A et B sont des parties disjointes de Ω, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
   (NB : En prenant $A = B = \emptyset$, on en déduit que $P(\emptyset) = 0$.)

3. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire (c'est-à-dire une fonction) et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une autre fonction. On note $\{x_i,\ i \in I\}$ l'ensemble des valeurs prises par X, et $\{y_i,\ i \in I\}$ l'ensemble des valeurs prises par $h(X) := h \circ X$. Par définition, l'espérance de $h(X)$ est
$$E(h(X)) = \sum_{i \in I} P\big(\{h(X) = y_i\}\big) y_i,$$
où $\{h(X) = y_i\} = \big\{\omega \in \Omega \ : \ h(X(\omega)) = y_i\big\}$ pour tout $i \in I$. Le théorème de transfert affirme que
$$E(h(X)) = \sum_{i \in I} P\big(\{X = x_i\}\big) h(x_i),$$
où $\{X = x_i\} = \big\{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) = x_i\big\}$ pour tout $i \in I$.
On peut le comparer à la définition de l'espérance de X (qui correspond au cas $h(x) = x$) :
$$E(X) = \sum_{i \in I} P\big(\{X = x_i\}\big) x_i.$$
4. Soient r et n deux entiers, soient $x_1, \ldots, x_r$ des réels, des complexes ou des indéterminées. Alors
$$(x_1 + \cdots + x_r)^n = \sum_{(k_1,\ldots,k_r)} \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!} x_1^{k_1} \cdots x_r^{k_r},$$
où $(k_1, \ldots, k_r)$ parcourt l'ensemble des r-listes d'entiers naturels tels que $k_1 + \cdots + k_r = n$.

Exercice 1 (5 points) Quatre voyageurs A, B, C et D, n'ayant pas réservé leur place, se répartissent au hasard dans les voitures 1, 2, et 3 d'un train.

On observe la répartition des voyageurs dans les voitures.

Soit X_A le numéro de la voiture dans laquelle monte le voyageur A.

Soient de même X_B, X_C, X_D le numéro de la voiture dans laquelle montent respectivement les voyageurs B, C, D.

1. Décrire l'espace des réalisations Ω et la probabilité P sur Ω correspondant à l'expérience.
2. Quelle est la probabilité que les quatre voyageurs montent dans la même voiture ?
3. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins un voyageur dans chaque voiture ?
4. Calculer l'espérance $E(X_A)$.
5. Soit $S = X_A + X_B + X_C + X_D$. Calculer l'espérance $E(S)$.

Solution.

1. Une réalisation consiste à décrire la voiture dans laquelle chacun des voyageurs monte : c'est une application f de $\{A, B, C, D\}$ vers $\{1, 2, 3\}$: la voiture dans laquelle monte A est $f(A)$, etc. (notons au passage que $X_A(f) = f(A)$.)
Ainsi, $\Omega = \{1, 2, 3\}^{\{A,B,C,D\}}$. Comme les voyageurs ne se concertent pas et que toutes les voitures semblent jouer le même rôle, on munit Ω de la probabilité uniforme [1]. Notons que $|\Omega| = 3^4 = 81$.

1. Ce n'est pas évident. Par exemple, si l'on savait que nos voyageurs descendent à Marseille ou à la gare de Lyon à Paris, deux gares en cul-de-sac, et qu'ils ont une correspondance serrée, il y aurait fort à parier qu'ils essaieraient de monter dans la voiture de tête pour être plus vite sur le quai du train suivant. Si l'on savait que les voyageurs sont de la même famille, on pourrait imaginer qu'ils auraient tendance à aller dans la même voiture.

2. Soit $f \in \Omega$. Dire que les quatre voyageurs montent dans la même voiture, c'est dire que $f(A) = f(B) = f(C) = f(D)$; autrement dit, f est constante. Il y a trois applications constantes, autant que de voitures. La probabilité de l'événement E « les quatre voyageurs montent dans la même voiture » est :
$$P(E) = \frac{3}{3^4} = \frac{1}{27}.$$
3. Une fois que l'un de nos voyageurs s'est mis dans chaque voiture, il reste un « dernier » voyageur à placer. Il y a donc 2 voyageurs dans une voiture (celle du dernier) et 1 dans chacune des deux autres. On décrit une telle répartition en choisissant successivement :
   — la voiture qui accueille deux voyageurs : il y en a 3 possibles ;
   — les deux voyageurs qui s'y placent : il y en a $\binom{4}{2} = 6$ possibles ;
   — la répartition des deux derniers voyageurs dans les deux dernières voitures, à raison d'un par voiture : il y en a $2!$ possibles.

   Au bilan, on trouve $3 \times 6 \times 2 = 36$ répartitions avec au moins un passager par voiture, d'où une probabilité de $36/81 = 4/9$.
4. Pour calculer l'espérance de X_A, on applique le théorème de transfert (ou ici la définition de l'espérance). Pour $k \in \{1, 2, 3\}$, parmi les applications $f : \{A, B, C, D\} \to \{1, 2, 3\}$, celles telles que $f(A) = k$ sont déterminées par sa restriction à $\{B, C, D\}$, qui est quelconque ; il y en a donc $\left|\{1, 2, 3\}^{\{B,C,D\}}\right| = 3^3 = 27$. Ainsi :
$$E(X_A) = \sum_{k=1}^{3} k\, P(X_A = k) = \sum_{k=1}^{3} k \times \frac{3^3}{3^4} = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3) = 2.$$
   Bien sûr, pour les autres voyageurs, on a : $E(X_B) = E(X_C) = E(X_D) = 2$ par le même raisonnement.
5. L'espérance est additive :
$$E(X_A + X_B + X_C + X_D) = E(X_A) + E(X_B) + E(X_C) + E(X_D) = 8.$$

Exercice 2 (3 points)

Un ensemble de 10 pages comprend 2 pages coloriées en rouge, 3 pages coloriées en vert et 5 pages blanches.

On considère que les pages de même couleur sont toutes indiscernables et on les range en ligne au hasard sur la table.

1. Calculer le nombre de dispositions des pages sur la table.
2. Calculer le nombre de dispositions de ces 10 pages qui alternent une page coloriée et une page blanche (sans contrainte sur la couleur de la première page).

Solution.

1. Il s'agit des arrangements avec répétitions d'ordre $(5, 3, 2)$, dont le nombre est :
$$\frac{(5 + 3 + 2)!}{5!3!2!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{6 \times 2} = 10 \times 9 \times 4 \times 7 = 2520.$$
2. Une disposition alternée commence soit par une feuille blanche (B), soit par une feuille colorée (C), c'est-à-dire qu'elle est de la forme $BCBCBCBCBC$ ou $CBCBCBCBCB$. Dans chaque cas, la disposition des feuilles colorées est un arrangement avec répétitions d'ordre $(3, 2)$, il y en a $5!/(3! \cdot 2!)$. Au total, le nombre de dispositions alternées est :
$$2 \times \frac{5!}{3!2!} = \frac{2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 2} = 5 \times 4 = 20.$$

Exercice 3 (10 points)

Deux étudiants choisissent au hasard (et indépendamment) chacun un code PIN formé de 4 chiffres DISTINCTS (parmi les dix chiffres de 0 à 9 ; par exemple : 1493 et 9163).

1. Quel est l'espace des réalisations Ω et la probabilité P sur Ω correspondant à l'expérience ?
2. Quelle est la probabilité que les deux étudiants aient choisi le même code ?
3. Quelle est la probabilité que les deux codes commencent par le même chiffre ? (Exemple : 1493 et 1695.)
4. Quelle est la probabilité que les deux codes commencent et se terminent par les mêmes chiffres ? (Exemple : 1493 et 1693 ou encore 2493 et 2683.)
5. Quelle est la probabilité que les chiffres d'au moins un des codes soient tous impairs ?
6. Quelle est la probabilité que les deux codes commencent par le même chiffre et que ce soit la seule position où les deux codes ont le même chiffre ? (Exemple : 1493 et 1637.)

Solution modèle réduit. Supposons qu'au lieu de codes PIN à quatre chiffres choisis parmi $\{0, \ldots, 9\}$, on ait des codes MINIPIN à deux lettres choisies parmi $\{A, B, C\}$. Dans ce modèle réduit, l'ensemble des *dix*[2] chiffres $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ est donc remplacé par l'ensemble des trois lettres $\{A, B, C\}$. Il va de soi que cet ensemble ne peut pas suffire pour décrire un code MINIPIN et encore moins *deux* codes MINIPIN.

Un code MINIPIN, c'est donc un mot de deux lettres, c'est-à-dire une liste ordonnée de deux lettres. L'énoncé impose que ces lettres soient différentes. Voici l'ensemble de ces mots :

$$\Omega_1 = \{AB, AC, BA, BC, CA, CB\}.$$

Le nombre d'éléments de Ω_1 est le nombre d'arrangements de 2 lettres parmi 3, c'est-à-dire :

$$\mathsf{A}_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 6.$$

Pour décrire *deux* codes MINIPIN, un pour chaque étudiant, il faut donc... deux codes, entre lesquels on distingue le premier et le deuxième. On veut donc un *couple* de codes MINIPIN, c'est-à-dire un élément du produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_1$. La figure 1 donne deux représentations de ce produit cartésien.

Solution.

1. Un code PIN est un quadruplet (a, b, c, d), ou, pour simplifier, $abcd$, formé de chiffres distincts : c'est une application de $\{1, 2, 3, 4\}$ (indice qui donnne la position du chiffre) vers l'ensemble des chiffres $\{0, 1, \ldots, 9\}$ (l'image de 1 est a, celle de 2 est b, etc.), qui est injective puisqu'un chiffre ne peut pas être répété. **Avec les notations du cours leur ensemble est** $\mathrm{Inj}([\![1, 4]\!], [\![0, 9]\!])$. Autrement dit, c'est un arrangement de 4 chiffres de $\{0, \ldots, 9\}$. Il y en a
$$N = \mathsf{A}_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040.$$
Une réalisation est un couple de tels arrangements : Ω est l'ensemble des couples (C_1, C_2) où C_1 et C_2 sont des arrangements de 4 éléments parmi les 10 chiffres $\{0, \ldots, 9\}$. **Avec les notations du cours** $\Omega = \mathrm{Inj}([\![1, 4]\!], [\![0, 9]\!])^2$
Faute d'informations plus précises[3], on munit Ω de la probabilité uniforme. Le cardinal d'un singleton est $\frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{N^2}$.

2. Un nombre conséquent d'entre vous pensent qu'il y a neuf chiffres de 0 à 9, cela semble improbable.
3. Il est pourtant plausible que le code « 1234 » sera plus souvent choisi que d'autres...

CB	(CB,AB)	(CB,AC)	(CB,BA)	(CB,BC)	(CB,CA)	(CB,CB)
CA	(CA,AB)	(CA,AC)	(CA,BA)	(CA,BC)	(CA,CA)	(CA,CB)
BC	(BC,AB)	(BC,AC)	(BC,BA)	(BC,BC)	(BC,CA)	(BC,CB)
BA	(BA,AB)	(BA,AC)	(BA,BA)	(BA,BC)	(BA,CA)	(BA,CB)
AC	(AC,AB)	(AC,AC)	(AC,BA)	(AC,BC)	(AC,CA)	(AC,CB)
AB	(AB,AB)	(AB,AC)	(AB,BA)	(AB,BC)	(AB,CA)	(AB,CB)
ét. 2\ét. 1	AB	AC	BA	BC	CA	CB

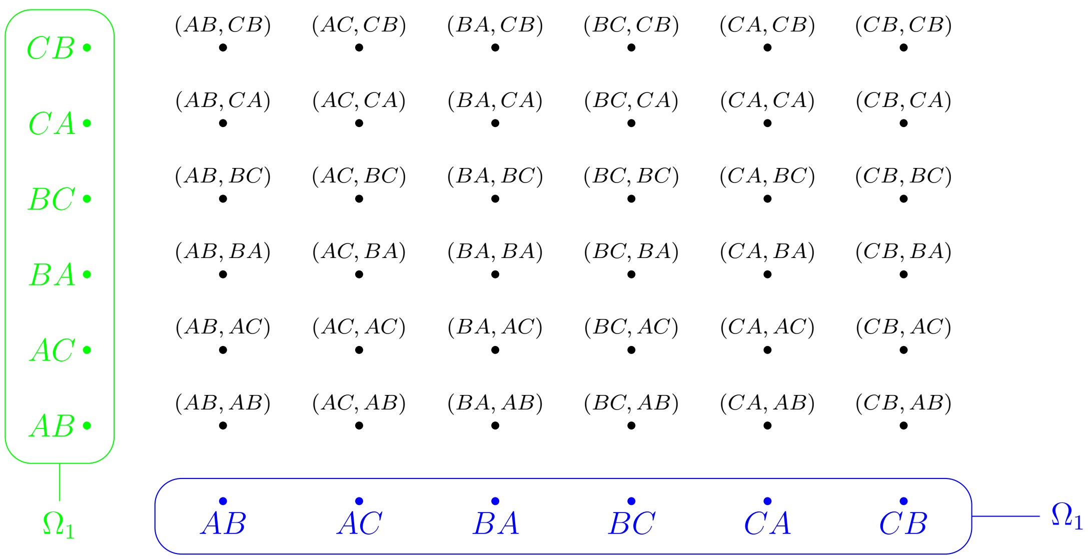

FIGURE 1 – Deux représentations du produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_1$

2. L'événement A : « les deux étudiants ont choisi le même code » est l'ensemble des couples (C, C), où C parcourt l'ensemble des arrangements. Le cardinal de A est $N = \mathsf{A}_{10}^4$ et sa probabilité est :
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{N}{N^2} = \frac{1}{5040}.$$

3. L'événement B : « les deux codes commencent par le même chiffre » est l'ensemble des couples $(abcd, ab'c'd')$.
Choisissons le premier chiffre $a \in \{0, \dots, 9\}$. Un code $abcd$ est déterminé par un arrangement des trois chiffres bcd à choisir dans $\{0, \dots, 9\} \setminus \{a\}$: il y en a A_9^3 ; idem pour les codes $ab'c'd'$. Le nombre de couples de codes qui commencent par a est donc $\left(\mathsf{A}_9^3\right)^2$, indépendant de a, et la probabilité de B est :
$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{10 \times \left(\mathsf{A}_9^3\right)^2}{N^2} = \frac{10 \times (9 \times 8 \times 7)^2}{(10 \times 9 \times 8 \times 7)^2} = \frac{1}{10},$$
ce qui n'est pas fait pour nous surprendre.

4. L'événément C : « les deux codes commencent et finissent par les mêmes chiffres » est l'ensemble des couples de codes $(abcd, ab'c'd)$.
Fixons a et d (différents). le nombre de couples (a, d) est le nombre d'arrangement de 2 chiffres parmi 10, c'est-à-dire A_{10}^2. Les couples de codes de C qui commencent par a et finissent par d sont déterminés par les couples de couples $\big((b, c), (b', c')\big)$ de chiffres distincts et différents de a et d : ce sont donc des arrangements de 2 éléments de $\{0, \dots, 9\} \setminus \{a, d\}$: il y a A_8^2 couples (b, c) et autant de couples (b', c'). Comme ce nombre est indépendant

de a et d, le cardinal de C est : $\mathrm{A}_{10}^2 \cdot \left(\mathsf{A}_8^2\right)^2$ et sa probabilité est :

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{\mathrm{A}_{10}^2 \cdot \left(\mathsf{A}_8^2\right)^2}{\left(\mathsf{A}_{10}^4\right)^2} = \frac{10 \times 9 \times (8 \times 7)^2}{(10 \times 9 \times 8 \times 7)^2} = \frac{1}{10 \times 9} = \frac{1}{90}.$$

Cela ne nous étonnera pas beaucoup non plus...

5. Soit D l'événement : « les chiffres d'au moins un des codes sont tous impairs ». On note D_1 (resp. D_2) l'événement : « tous les chiffres du premier (resp. second) code sont tous impairs ». Ainsi, $D = D_1 \cup D_2$.

   Un code PIN impair est un arrangement de 4 chiffres choisis parmi $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Il y en a $\mathsf{A}_5^4 = \frac{5!}{1!} = 120$. Un élément de D_1 ou D_2 est formé d'un PIN impair et d'un PIN quelconque. Le cardinal de D_1, comme de D_2, est donc $120N$. L'intersection $D_1 \cap D_2$ est formée des couples de codes impairs, il y en a 120^2. Ainsi :

$$P(D) = \frac{|D_1 \cup D_2|}{|\Omega|} = \frac{|D_1| + |D_2| - |D_1 \cap D_2|}{|\Omega|} = \frac{2 \times 120N - 120^2}{N^2} = \frac{83}{1764} \simeq 0{,}0471.$$

6. C'est passablement pénible si on ne pense pas à la formule du crible. Soit E l'évènement : « les deux codes commencent par le même chiffre et c'est la seule position où les deux codes ont le même chiffre ». L'évènement $B - E$ est : « les deux codes commencent par le même chiffre et il existe une autre position où les deux codes ont le même chiffre ». Soit donc, pour $I \subset \{1, 2, 3, 4\}$, F_I l'évènement « les deux codes ont le même chiffre pour tout élément de l'ensemble I ».

   On a donc

$$B - E = F_{\{1,2\}} \cup F_{\{1,3\}} \cup F_{\{1,4\}}.$$

   Par la formule de Poincaré, on a donc :

$$\begin{aligned} P(B - E) = {} & P(F_{\{1,2\}}) + P(F_{\{1,3\}}) + P(F_{\{1,4\}}) \\ & - P(F_{\{1,2\}} \cap F_{\{1,3\}}) - P(F_{\{1,3\}} \cap F_{\{1,4\}}) - P(F_{\{1,2\}} \cap F_{\{1,4\}}) \\ & + P(F_{\{1,2\}} \cap F_{\{1,3\}} \cap F_{\{1,4\}}) \end{aligned}$$

   Or, par la définition, $F_I = \bigcap_{i \in I} F_{\{i\}}$ donc $F_I \cap F_J = F_{I \cup J}$. De plus en raisonnant comme au 4, $P(F_I)$ ne dépend que du cardinal i de I, on fixe d'abord les éléments communs de I on a A_{10}^i choix pour la partie commune des deux codes, puis parmi les $10 - i$ chiffres restant, on tire le reste des deux codes, soit $(A_{10-i}^{4-i})^2$ choix, donc :

$$P(F_I) = \frac{A_{10}^i (A_{10-i}^{4-i})^2}{(A_{10}^4)^2} = \frac{A_{10}^i (A_{10-i}^{4-i})^2}{(A_{10}^i A_{10-i}^{4-i})^2} = \frac{1}{A_{10}^i},$$

   donc :

$$\begin{aligned} P(E) &= P(B) - P(B - E) \\ &= P(B) - 3P(F_{\{1,2\}}) + 3P(F_{\{1,2,3\}}) + P(F_{\{1,2,3,4\}}) \\ &= \frac{1}{10} - \frac{3}{10 \cdot 9} + \frac{3}{10 \cdot 9 \cdot 8} - \frac{1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{356}{5040}. \end{aligned}$$