

Contrôle continu 1 du Mardi 25 février 2020

Durée : 1 heure 15.

Les documents et les calculatrices sont interdits.

On prendra soin à JUSTIFIER les réponses aux exercices.

Les applications numériques ne sont pas demandées : les résultats peuvent être exprimés en terme de sommes, différences, produits et quotients.

Le sujet est recto-verso et contient 2 parties, soit au total 3 exercices et une question de cours.

Première Partie.

(A rendre sur la première copie)

Question de Cours (5 points) :

1. Donner la formule pour le cardinal de l'ensemble des applications entre deux ensembles finis A et B .
2. Décrire la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et faire la preuve du calcul de son espérance.
3. Donner la définition de l'indépendance de n variables aléatoires sur un espace de probabilité fini ($n > 2$).
4. Donner la définition et la formule (de transfert) pour le moment d'ordre k d'une variable aléatoire sur un espace de probabilité fini. ($k \geq 2$)

Exercice 1 (5 points)

Une urne contient 5 boules :

- 1 boule bleue numérotée 0,
- 2 boules blanches numérotées 1,
- 2 boules rouges numérotées 2.

On prélève une première boule et on note X le numéro de la boule. On remet la boule prélevé et on tire une deuxième boule (indépendamment) et on note Y le numéro obtenu.

1. Décrire l'espace des réalisations Ω et la probabilité P sur Ω correspondant à l'expérience.
2. Calculer $P(X = 1)$.
3. Calculer l'espérance $E(X)$.
4. Calculer $E(X^2)$.
5. Calculer $P(X + Y = 4)$.
6. Calculer la probabilité que les boules tirées soient de même couleur $P(X = Y)$.
7. Calculer $E(X + Y)$.

Deuxième Partie.

(A rendre sur la deuxième copie)

Exercice 2 (3 points)

Calculer en fonction de n les 2 sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^n (-2)^k \binom{n}{k}, \quad S_2 = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

Exercice 3 (7 points)

Deux étudiants jouent au scrabble en n'utilisant que les lettres du mot TSARINE. Ils ont donc un sachet de 56 jetons contenant :

- 15 jetons avec la lettre E,
- 9 jetons avec la lettre A,
- 8 jetons avec la lettre I
- et 6 jetons de chacune des consonnes T,S,R,N.

Pour un tirage de leur chevalet, chaque étudiant tire 7 jetons pour lequel l'ordre des lettres ne compte pas. Par contre, l'ordre des lettres compte quand il s'agit de mots qu'on peut former avec les lettres des jetons. En résumé, l'ordre des lettres compte dans un mot de lettres mais pas dans un chevalet de lettres. Un tirage de jetons ne distingue pas l'ordre mais distingue les jetons de mêmes lettres.

1. Combien de tirages de 7 jetons peut-on tirer dans le sachet (lors du premier tirage, les jetons sont physiquement distinguables, on peut les supposer numérotés) ?
2. Le premier étudiant tire 7 jetons dans le sachet. Combien de tirages de jetons donnent exactement les lettres du mot TSARINE ?
3. Combien de MOTS le premier étudiant peut-il former avec les lettres du mot TSARINE en utilisant toutes les lettres et une seule fois chaque lettre (sans tenir compte du sens dans aucune langue).
4. On suppose que le premier étudiant a tiré les lettres du mot TSARINE. Le second tire 7 jetons parmi les 49 jetons restant, combien de tirages de 7 jetons ne donne que des voyelles et au moins un E.
5. On suppose toujours que le premier étudiant a tiré les lettres du mot TSARINE. Le second tire 7 jetons parmi les 49 jetons restant, combien de tirages de 7 jetons ne donne que des voyelles et au moins un A et un E.
6. Combien de MOTS le deuxième étudiant peut-il former avec les lettres AAIIIEE en utilisant toutes les lettres des 7 jetons autant de fois qu'il a de jetons de chaque lettre (sans tenir compte du sens dans aucune langue).
7. Combien de chevalets de 7 lettres le premier étudiant peut-il obtenir lors de son premier tirage de 7 jetons ? (par exemple on a pu tirer les lettres $\{A, A, A, E, E, I, I\}$, $\{A, A, E, E, I, I, I\}$, ou $\{T, S, A, R, I, N, E\}$ qui sont 3 chevalets différents mais $\{A, A, A, I, I, E, E\}$ est le même chevalet que le premier).