Probabilités discrètes et Statistiques descriptives

L2 Université Lyon 1 2018

Contrôle continu 2 du 3 avril 2018
Durée : 1h15
Les documents et calculatrices sont interdits.
On prendra soin à JUSTIFIER les réponses aux exercices

Questions de Cours (10 minutes maxi, 4 points) :

1. Donner la formule pour la probabilité de l'union d'une suite croissante d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Définir l'indépendance mutuelle d'une suite finie $A_1, ..., A_n$ d'évènements.
3. Énoncer le théorème des probabilités totales.
4. Énoncer la théorème de transfert pour les variables discrètes.

Exercice 1. (3 points) On considère une maladie qui touche une personne sur dix mille en moyenne, et on dispose d'un test pour cette maladie. Si la personne testée est malade, le test est positif dans 95% des cas, et si elle est saine, le test est négatif dans 95% des cas.

1. Énoncer la formule du cours que vous allez utiliser pour justifier les questions suivantes.
2. M. Legris fait le test, et il est positif. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?
3. Mme Souscolline fait le test, et il est négatif. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ?

Exercice 2. (3 points) On fixe un réel λ. Montrer que la famille $(\frac{\lambda^{i+j}}{(i+j+1)!})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme :

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j+1)!}.$$

Exercice 3. (5 points+ Bonus : 1 point)

1. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$. Exprimer les fonctions génératrices des variables aléatoires $2X$ et $X+1$ en fonction de la fonction génératrice G_X de X.
2. On fixe un entier d et on considère une variable aléatoire X de loi uniforme dans $\{0, 1, \cdots, d-1\}$. Calculer l'espérance et la fonction génératrice de X.
3. **(Bonus : 1 point)** On prend la même variable aléatoire X de loi uniforme dans $\{0, 1, \cdots, d-1\}$. Calculer la variance de X.
4. On fixe un autre entier n et on considère n variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_0, \cdots, X_{n-1}$ toutes de loi uniforme dans $\{0, \cdots, d-1\}$. On pose

$$Z = \sum_{k=0}^{n-1} d^k X_k$$

   Calculer la fonction génératrice de Z. Quelle est la loi de Z ?

Exercice 4. (5 points)

1. Rappeler (avec une démonstration) la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres λ et μ.

On suppose que le nombre de Saumons qui remonte la rivière Rimouski est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque saumon a 1 chance sur 4 de se faire manger par un ours pendant son voyage, indépendamment des autres saumons et du nombre de saumon. On note Y le nombre de saumons qui sont mangés par un ours.

2. Soit $k, n \in \mathbb{N}$. Que vaut $P(Y = k \mid X = n)$?
3. Calculer la loi de Y.
4. Y et $X - Y$ sont-elles indépendantes ?