Probabilités discrètes et Statistiques descriptives

L2 Université Lyon 1 2019

Contrôle continu 1 du Mardi 2 avril 2019

Durée : 1 heure 15.

Les documents et les calculatrices sont interdits.

On prendra soin à JUSTIFIER les réponses aux exercices.

Le sujet est recto-verso et contient 2 parties, soit au total 5 exercices et une question de cours.

Première Partie.

(A rendre sur la première copie)

Questions de Cours (10 minutes maxi, 4 points) :

1. (0,5 point) Donner un exemple d'ensemble infini dénombrable .
2. (0,5 point) Donner un exemple d'ensemble infini non-dénombrable.
3. Enoncer le théorème de Fubini-Tonelli pour les familles sommables.
4. Donner la formule pour la probabilité de l'intersection d'une suite décroissante d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Définir la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète.

Exercice 1. (4 points)

On fixe un réel $p \in]0,1[$.

Montrer que les familles $(p^{i+j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ et $((i+j)p^{i+j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ sont sommables et calculer leurs sommes :

$$S_1 = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} p^{i+j},$$

et

$$S_2 = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} (i+j)p^{i+j}.$$

Exercice 2. (2 points)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $p \in]0,1[$. On suppose que $P(X = n) = c\ p^n$ pour une constante $c > 0$.

1. Rappeler la valeur de c.
2. Calculer $P(X \geq 2)$.
3. Calculer la loi de $Y = (-1)^X$.

Deuxième Partie.
(A rendre sur la deuxième copie)

Exercice 3. (3 points)
On considère la série statistique $(1, 3, 9, 19, 7, 3)$.

1. Déterminer sa moyenne empirique et sa variance empirique.
2. Déterminer sa médiane et ses quartiles.

Exercice 4. (3 points)
Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes de risques R1, R2, R3 : les bons risques, les risques moyens et les mauvais risques. Les effectifs des ces trois classes représentent 10% de la population totale pour la classe R1, 60% pour R2 et 30% pour R3. Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accrochage au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0,05 ; 0,15 et 0,30.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accrochage dans l'année ?
2. Si M. Martin a eu un accrochage cette année, quelle est la probabilité qu'il soit du type R1 ?

Exercice 5. (4 points)
Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X suit une de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire : $P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$.

1. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$.
2. Calculer $\mathbb{E}(\frac{1}{1+X})$.

ou au choix (à la place du 5 ou du 2) :

Exercice 6. Dans une poste d'un petit village, on remarque qu'entre 10 heures et 11 heures, la probabilité pour que deux personnes entrent durant la même minute peut être considérée comme nulle et que l'arrivée des personnes est indépendante de la minute considérée. On a observé que la probabilité pour qu'une personne se présente entre la minute n et la minute $n + 1$ est : $p = 0.1$. Soit X le nombre de personnes se présentant au guichet entre 10h et 11h.

1. Calculer la loi de X.
2. Quelle est l'espérance de la variable X ? Quelle est sa variance ?