Probabilités discrètes et Statistiques descriptives **L2 Université Lyon 1 2018**

Examen final du 22 mai 2018.
Durée : 2h
Les documents et calculatrices sont interdits. 2 pages
On prendra soin à JUSTIFIER les réponses aux exercices

— On note toujours $\mathbb{E}(Z)$ l'espérance d'une variable aléatoire Z et $\text{var}(Z)$ sa variance.

— On notera $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice d'un ensemble A, c'est-à-dire que $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbf{1}_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

— Rappel : une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1]$ si X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

— On rappelle que la densité d'une variable de loi uniforme sur $[0, 1]$ est donnée par $g(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Questions de Cours (10 minutes maxi, 4 points) :

1. Énoncer le théorème de Moivre-Laplace.
2. Donner la définition de la variance empirique non biaisée d'un échantillon statistique.
3. Énoncer le théorème de sommation par paquet pour les familles sommables à termes positifs.
4. Énoncer l'inégalité de Markov.

Exercice 1. (4 points) Soit (X ; Y) un couple de v.a. discrètes à valeur $\{0, 1\} \times \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ dont la loi de probabilité est indiquée dans le tableau ci-dessous :

X/Y	-2	-1	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	0

1. Donner la loi de X et la loi de Y.
2. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
3. Calculer les espérances de X et Y.
4. Calculer la variance de Y.
5. Calculer la covariance $cov(X; Y)$.

Exercice 2. (3 points) Soit $c > 0$. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = cx^2\mathbf{1}_{[0,1]}(x).$$

1. Quel c doit on prendre pour que f soit une densité de probabilité ?
2. On choisit le c de la question 1. Soit X une variable aléatoire de densité f. Calculer la moyenne $\mathbb{E}(X)$, ainsi que la fonction de répartition $F_X(t)$ (Rappel : $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$).
3. Soient U, V, W trois variables uniformes sur $[0, 1]$ indépendantes. Soit $Z = \max(U, V, W)$. Calculer la fonction de répartition $F_Z(t) = \mathbb{P}(Z \leq t)$.
4. Quelle est la densité de la variable continue Z ?

Exercice 3. (6 points)

Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0,1[$. On suppose que

$$P(T = n) = p^2\ n(1-p)^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Calculer $P(T \geq 2)$ et la probabilité conditionnelle que T soit impair sachant qu'il est supérieur à 2 :
$$P(T \text{ impair} \mid T \geq 2).$$
2. Calculer la fonction génératrice $g_T(s)$ de T pour $s \in [0,1]$.
3. Soient R, S deux variables indépendantes de même loi géométrique de paramètre p.
Calculer la fonction génératrice de $R + S - 1$.
4. Calculer l'espérance et la variance de T.
5. En utilisant un résultat du cours que l'on énoncera, trouver un intervalle $[a,b]$ (avec a, b fonctions de p) telle que
$$P(T \in [a,b]) \geq 1 - \alpha = 0,95.$$

Exercice 4. (3 points + Bonus : 3 points)

Une urne contient n boules rouges numérotées de 1 à n. Une deuxième urne contient n boules vertes numérotées de 1 à n. On tire 1 boule au hasard dans chaque urne. On appelle X la somme des valeurs obtenues.

1. Montrer que pour $k \in [\![2, n]\!]$
$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{k-1}{n^2}.$$
2. Calculer $P(X \leq n)$.
3. Calculer la loi de X.
4. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
5. **Bonus : 2 points** On rassemble les 2 urnes en une seule urne et on tire 2 boules simultanément au hasard. Soit Y la somme des valeurs obtenues. Calculer la loi de Y.
6. **Bonus : 1 point** On considère de nouveau les 2 urnes de départ et une troisième urne avec des boules bleues et on tire 1 boule au hasard dans chaque urne. Soit Z la somme des trois valeurs obtenues. Calculer la fonction génératrice de Z.