Probabilités discrètes
et Statistiques descriptives

L2 Université Lyon 1 2019

Examen final du 23 mai 2019
Durée : 2 h
Les documents et calculatrices sont interdits. Deux pages
On prendra soin à JUSTIFIER les réponses aux exercices

- On note toujours $\mathbb{E}(Z)$ l'espérance d'une variable aléatoire Z et $\mathrm{Var}(Z)$ sa variance.
- On notera $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice d'un ensemble A, c'est-à-dire que $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbf{1}_A(x) = 0$ si $x \notin A$.
- On rappelle que la densité d'une variable de loi uniforme sur $[0,1]$ est donnée par $g(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- Tableau de valeurs de fractiles de la loi normale
  $P(N \leq z_\alpha) = 1 - \alpha$ pour N de loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0,1)$.

α	0.2	0.1	0.05	0.025	0.01
z_α	0.842	1.282	1.645	1.96	2.326

Questions de cours (10 minutes maxi, 4 points)

1. Énoncer la loi faible des grands nombres.
2. Donner la formule pour la variance de $aX + bY$ avec X, Y, variables discrètes indépendantes d'ordre 2, $a, b \in \mathbb{R}$.
3. Énoncer le théorème de sommation par paquet pour les familles sommables générales (non nécessairement positives).
4. Énoncer l'inégalité de Tchebychev. En déduire un intervalle de confiance pour le paramètre d'une variable de Bernoulli.

Exercice 1. (4 points)

Soit $(X;Y)$ un couple de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\{0,1,2\} \times \{-1,1\}$ et dont la loi de probabilité est indiquée dans le tableau ci-dessous, où a est un réel :

$X \setminus\!\setminus Y$	-1	1
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	a

1. Calculer le nombre réel a.
2. Donner la loi de X et la loi de Y.
3. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?
4. Calculer les espérances de X et Y.
5. Calculer la variance de X.
6. Calculer la loi du maximum de X et Y, c'est-à-dire de la variable $Z = \max(X;Y)$.
7. Calculer l'espérance de la variable $Z = \max(X;Y)$.

Exercice 2. (6 points)

Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que pour $n > 0$:

$$\mathbb{P}(T = n) = \frac{\mathrm{e}^{-1/2}}{2^{n+1}\, n!}.$$

1. Calculer $\mathbb{P}(T = 0)$.
2. Calculer la fonction génératrice de T.
3. Soient R et S deux variables indépendantes. On suppose que R suit une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(1, \frac{1}{2})$ et S une loi de Poisson $\mathscr{P}(\frac{1}{2})$.
   Calculer la loi de la variable RS.
4. Calculer l'espérance et la variance de T.
5. Calculer la fonction génératrice de $R + S$.
6. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(R + S = 2)$.

Exercice 3. (4 points)

Soit $c > 0$. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = c\frac{1}{\sqrt{x}}\mathbf{1}_{[1,4]}(x).$$

1. Quel c doit-on prendre pour que f soit une densité de probabilité ?
2. On choisit la valeur de c trouvée à la question 1. Soit X une variable aléatoire de densité f. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$, ainsi que la fonction de répartition $F_X(t)$.
3. Soit U une variable suivant une loi uniforme sur $[1, 2]$. Soit $Z = U^2$. Calculer la fonction de répartition $F_Z(t)$.
4. Quelle est la densité de la variable continue Z ?

Exercice 4. (4 points)

Dans une grande station de montagne, il y a 5 000 skieurs par semaine et ils restent exactement une semaine chacun. On sait qu'en moyenne 1 % des skieurs ont un accident pendant leur semaine de ski, et on va supposer que ce risque est le même pour chaque skieur indépendamment.

1. Soit X le nombre d'accidents survenus à la station pendant 2 semaines de vacances d'hiver. Quelle est la loi de X ?
2. Par quelle loi normale peut-on approcher X ?
   On utilise l'approximation par loi normale dans la suite de l'exercice.
3. Quelle est la probabilité qu'il y ait moins que 100 accidents au cours des deux semaines ?
4. L'hôpital de la station a remarqué qu'un skieur blessé peut rester hospitalisé jusqu'à 2 semaines. Pour être sûr à 95 % d'accueillir toutes les victimes d'accidents sur les 2 semaines, combien de places l'hôpital de la station doit-il préparer ?
5. Durant les deux semaines de vacances de l'année 2019, on observe 111 accidents. À partir de cette observation, donnez un intervalle de confiance à 95 % pour la probabilité p qu'un skieur ait eu un accident durant sa semaine de vacances.