



DM 2. À RENDRE POUR LE 5 MAI 2020

Cet exercice est à rédiger puis les photos ou scans sont à déposer sur les dépôts créés sur tomuss. En cas de problème, écrivez à votre enseignant de TD.

L'exercice se situe dans un élevage de lapins dans un laboratoire. On considère que le nombre de lapins (des deux sexes) engendrés par une lapine de cet élevage est une variable aléatoire S dont la loi est donnée, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathbb{P}(S = n) = p(1 - p)^n$$

Attention, ce n'est pas exactement la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ définie sur \mathbb{N}^* utilisée en TD, c'est la variante notée en cours $\mathcal{G}_0(p)$. Le paramètre p de cette loi appartient à l'intervalle $]0, 1[$.

1. Jeannette est une lapine de cet élevage. Quelle est la probabilité qu'elle n'engendre aucun lapereau? Calculer $\mathbb{P}(S \geq n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit Z une variable aléatoire de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Donner, sans démonstration, l'espérance et la variance de Z . Déterminer la loi de $Z' = Z - 1$. En déduire l'espérance et la variance de S .
3. Soit X le nombre de lapins femelles et Y le nombre de lapins mâles engendrés par Jeannette. On a : $S = X + Y$. On suppose que chaque bébé lapin a une chance sur deux d'être une femelle et une chance sur deux d'être un mâle. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$. Démontrer que :

$$\mathbb{P}(X = k \mid S = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

4. En utilisant les séries entières, montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\text{pour tout } x \in]-1, 1[, \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1)x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

5. Calculer $\mathbb{P}(X = 0)$ puis $\mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. C'est une loi du même type que celle de S , mais avec un paramètre différent. Préciser ce paramètre.
6. En déduire que Y est une variable d'ordre 1 et calculer l'espérance de Y : $\mathbb{E}(Y)$. Auriez-vous pu prévoir ce résultat intuitivement ?