

TD 2 : Probabilités sur des ensembles finis

Exercice 1. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ avec $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 0) = 1/4$. Calculer $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X^2)$.

Exercice 2. On considère une variable aléatoire X , de loi binomiale $\mathcal{B}(5, 1/2)$. Quel est l'ensemble S des valeurs prises par X ? Calculer $P(X = k)$ pour chaque $k \in S$. Calculer l'espérance et la variance de X .

Exercice 3. Pour chacune des expériences aléatoires suivantes, préciser l'ensemble Ω et construire une probabilité sur Ω .

1. On lance deux dés équilibrés (à 6 faces). Quelle est la probabilité que la somme des deux résultats soit égale à 7? Quelle est l'espérance de la somme?
2. On tire deux cartes (sans remise) d'un paquet de 6 cartes (numérotées de 1 à 6). Quelle est la probabilité que la somme des deux résultats soit égale à 7? Quelle est l'espérance de la somme?
3. Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour avoir plus d'une chance sur deux d'obtenir au moins un 6?
4. Lequel des deux événements suivants est plus probable : Obtenir au moins une fois un six en 4 lancers d'un dé ou obtenir au moins une fois un double six en 24 lancers de deux dés?

Exercice 4.

1. On possède deux pièces truquées différentes, la première obtient face avec probabilité p , la seconde avec probabilité q . On lance ces deux pièces successivement. Décrire l'ensemble Ω et construire une probabilité sur Ω .
Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois face?
2. Deux archers tirent sur n cibles, une flèche par cible et par archer. Le premier touche avec probabilité p , le second avec probabilité q . Décrire l'ensemble Ω et construire une probabilité sur Ω .
Quelle est la probabilité que k cibles au moins soient épargnées?

Exercice 5. Une urne contient des boules numérotées de 1 à 20. On tire sans remise trois boules de l'urne.

1. Décrire l'ensemble Ω et construire une probabilité sur Ω .
2. Quelle est la probabilité qu'au moins une boule ait un numéro supérieur à 17?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros en ordre croissant?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros successifs en ordre croissant?

Exercice 6. * On tire n fois une pièce truquée qui tombe sur face avec probabilité p . On cherche à calculer la probabilité de l'événement A : "obtenir un nombre pair de fois face".

1. Exprimer $\frac{1}{2}((x+y)^n + (y-x)^n)$ à l'aide du binôme de Newton.
2. En déduire une expression de $P(A)$. Que se passe-t-il quand p est très proche de 1?

Exercice 7. Une urne contient b boules bleues et r boules rouges. On procède à n tirages successifs avec remise.

1. Quelle est la probabilité de tirer exactement k fois une boule bleue?
2. Quelle est la probabilité de tirer au plus k boules rouges?