

TD 2 : Probabilités sur des ensembles finis

**Exercice 1.** On considère une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\{-1, 0, 1\}$  avec  $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 0) = 1/4$ . Calculer  $\mathbb{P}(X = 1)$ ,  $\mathbb{E}(X)$  et  $\mathbb{E}(X^2)$ .

**Exercice 2.** On considère une variable aléatoire  $X$ , de loi binomiale  $\mathcal{B}(5, 1/2)$ . Quel est l'ensemble  $S$  des valeurs prises par  $X$ ? Calculer  $P(X = k)$  pour chaque  $k \in S$ . Calculer l'espérance et la variance de  $X$ .

**Exercice 3.** Pour chacune des expériences aléatoires suivantes, préciser l'ensemble  $\Omega$  et construire une probabilité sur  $\Omega$ .

1. On lance deux dés équilibrés (à 6 faces). Quelle est la probabilité que la somme des deux résultats soit égale à 7? Quelle est l'espérance de la somme?
2. On tire deux cartes (sans remise) d'un paquet de 6 cartes (numérotées de 1 à 6). Quelle est la probabilité que la somme des deux résultats soit égale à 7? Quelle est l'espérance de la somme?
3. Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour avoir plus d'une chance sur deux d'obtenir au moins un 6?
4. Lequel des deux événements suivants est plus probable : Obtenir au moins une fois un six en 4 lancers d'un dé ou obtenir au moins une fois un double six en 24 lancers de deux dés?

**Exercice 4.**

1. On possède deux pièces truquées différentes, la première obtient face avec probabilité  $p$ , la seconde avec probabilité  $q$ . On lance ces deux pièces successivement. Décrire l'ensemble  $\Omega$  et construire une probabilité sur  $\Omega$ .  
Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois face?
2. Deux archers tirent sur  $n$  cibles, une flèche par cible et par archer. Le premier touche avec probabilité  $p$ , le second avec probabilité  $q$ . Décrire l'ensemble  $\Omega$  et construire une probabilité sur  $\Omega$ .  
Quelle est la probabilité que  $k$  cibles au moins soient épargnées?

**Exercice 5.** Une urne contient des boules numérotées de 1 à 20. On tire sans remise trois boules de l'urne.

1. Décrire l'ensemble  $\Omega$  et construire une probabilité sur  $\Omega$ .
2. Quelle est la probabilité qu'au moins une boule ait un numéro supérieur à 17?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros en ordre croissant?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros successifs en ordre croissant?

**Exercice 6.** \* On tire  $n$  fois une pièce truquée qui tombe sur face avec probabilité  $p$ . On cherche à calculer la probabilité de l'événement  $A$  : "obtenir un nombre pair de fois face".

1. Exprimer  $\frac{1}{2}((x+y)^n + (y-x)^n)$  à l'aide du binôme de Newton.
2. En déduire une expression de  $P(A)$ . Que se passe-t-il quand  $p$  est très proche de 1?

**Exercice 7.** Une urne contient  $b$  boules bleues et  $r$  boules rouges. On procède à  $n$  tirages successifs avec remise.

1. Quelle est la probabilité de tirer exactement  $k$  fois une boule bleue?
2. Quelle est la probabilité de tirer au plus  $k$  boules rouges?