

TD Feuille 4

Exercice 1. Loi d'un couple de variables aléatoires, table de contingence

Soit $(X; Y)$ un couple de v.a. discrètes à valeurs dans $\{1; 2; 3\} \times \{1; 2; 3; 4\}$ dont la loi de probabilité est indiquée dans le tableau ci-dessous :

X/Y	1	2	3	4
1	0,08	0,04	0,16	0,12
2	0,04	0,02	0,08	0,06
3	0,08	0,04	0,16	0,12

- Déterminer les lois marginales de X et Y .
- Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?
- Déterminer la loi de $\min(X; Y)$.

Correction :

- Pour calculer par exemple $\mathbb{P}(X = 1)$, on somme les probabilités de la ligne $X = 1$. La solution est

k	1	2	3
$\mathbb{P}(X = k)$	0,4	0,2	0,2

et

k	1	2	3	4
$\mathbb{P}(Y = k)$	0,2	0,1	0,4	0,3

- Ces variables aléatoires sont indépendantes, en effet les lignes du tableau sont multiples les unes des autres.
- Soit $Z = \min(X; Y)$. On calcule $\mathbb{P}(Z = k)$ en sommant sur toutes les possibilités (un L inversé dans le tableau). La solution est

k	1	2	3
$\mathbb{P}(Z = k)$	0,52	0,2	0,28

De même Soit $T = \max(X; Y)$. On calcule $\mathbb{P}(T = k)$ en sommant sur toutes les possibilités (un L inversé dans le tableau). La solution est

k	1	2	3	4
$\mathbb{P}(T = k)$	0,08	0,1	0,52	0,3

Exercice 2.

Soit $(X; Y)$ un couple de v.a. discrètes à valeur $\{1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$ dont la loi de probabilité est indiquée dans le tableau ci-dessous, a et b étant des paramètres réels :

X/Y	0	1	2
1	a	1/6	1/12
2	b	1/3	1/6

- Déterminer a et b pour que ce tableau soit celui d'une loi.
- Pour quelles valeurs de a et b ces v.a. sont-elles indépendantes ?

Correction :

- Les réels a et b doivent être positifs, et la somme de toutes les entrées du tableau doit être égale à 1. Ainsi, $a + b + 9/12 = 1$ donc $a + b = 1/4$. L'ensemble des couples (a, b) possibles est donc

$$\{(a, 1/4 - a) \mid a \in [0, 1/4]\}$$

2. Les variables sont indépendantes quand les lignes sont multiples les unes des autres. Sans prendre en compte les valeurs a et b , la ligne $X = 2$ est déjà égale à deux fois la ligne $X = 1$. Les variables aléatoires sont donc indépendantes exactement lorsque $2a = b = 1/4 - a$, c'est à dire

$$(a, b) = (1/12, 1/6).$$

Exercice 3. Événements indépendants deux à deux

On lance deux pièces équilibrées de manière indépendante. On considère les événements A : "la première pièce donne face", B : "la deuxième pièce donne face" et C : "les deux pièces donnent le même résultat". Montrer que les événements A , B et C sont indépendants deux à deux mais pas mutuellement indépendants.

Correction :

Les événements A et B sont clairement indépendants, puisqu'ils dépendent de pièces indépendantes. A et C sont indépendants car

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(\text{"les deux pièces donnent face"}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$$

et B et C sont indépendants de même. Cependant, A , B et C ne sont pas mutuellement indépendantes, car $\mathbb{P}(A \cap B^c \cap C) = 0$ alors que $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)\mathbb{P}(C) = 1/8$.

Exercice 4. Indépendance improbable

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble E dénombrable, et soit $f : E \rightarrow F$ une fonction. A quelle condition sur f les variables aléatoires X et $f(X)$ sont-elle indépendantes ?

Correction :

Il y a indépendance si et seulement si f est constante sur le support de X (i.e. $\{x \in E | \mathbb{P}(X = x) \neq 0\}$).

En effet, supposons que X et $f(X)$ sont indépendantes. Alors pour tous $e \in E$ et $g \in F$, on a

$$\mathbb{P}(X = e \text{ et } f(X) = g) = \mathbb{P}(X = e)\mathbb{P}(f(X) = g).$$

Mais si $X = e$, il n'y a qu'une possibilité pour $f(X)$, à savoir $f(e)$. Ainsi, pour tout $g \in F$, on a $\mathbb{P}(f(X) = g) = 0$ s'il existe e de probabilité non nulle avec $f(e) \neq g$. Ainsi, $f(X)$ ne peut prendre qu'une seule valeur avec probabilité non nulle, et donc f est constante sur le support de X .

Réciproquement, si f est constante sur le support de X , alors $f(X)$ est une variable aléatoire déterministe (une seule valeur à une probabilité non nulle) et donc elle est indépendante de toutes les variables aléatoires, en particulier de X .

Exercice 5. Indépendance et espérance

1. Montrer que deux variables de Bernoulli X et Y sont indépendantes si et seulement si $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
2. Trouver deux variables aléatoires X et Y non indépendantes mais vérifiant $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Correction :

1. Si X et Y sont indépendants alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ par propriété du cour. Réciproquement, soient X et Y des Bernoullis vérifiant $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Soient $f, g : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions, montrons que $\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = E(f(X))E(g(Y))$. Ces fonctions sont sur un ensemble à deux points, donc on peut les écrire comme des fonctions affines : $f(x) = ax + b$ et $g(x) = cx + d$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X)g(Y)) &= \mathbb{E}(acXY + adX + cbY + bd) \\ &= ac\mathbb{E}(XY) + ad\mathbb{E}(X) + cb\mathbb{E}(Y) + bd \\ &= ac\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + ad\mathbb{E}(X) + cb\mathbb{E}(Y) + bd \\ &= (a\mathbb{E}(X) + b)(c\mathbb{E}(Y) + d) \\ &= E(f(X))E(g(Y)). \end{aligned}$$

(Sinon, faire un tableau et exprimer les contraintes sur les quatre probabilités jointes...).

2. Il faut qu'au moins une des deux variables ai strictement plus de deux valeurs possibles d'après la question 1. On prend X une variable aléatoire uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$. Si $X = 0$ on prend $Y = 0$, et si $X \neq 0$, on prend $Y = 1$. On a alors $\mathbb{E}(X) = 0$ donc $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0$, et $\mathbb{E}(XY) = 1/3(-1 \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 1) = 0 = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 6. Sorcellerie

M. Dursley sait qu'il y a environ une chance sur dix-neuf millions de gagner le jackpot au loto. Par ailleurs, il croit en l'existence de sorcier.e.s capable de prédire les chiffres du loto à l'avance sans se tromper et incapables de résister à l'envie d'utiliser ce pouvoir ; il estime que sa voisine, Mme Potter, a une chance sur mille d'être une sorcière.

Mme Potter viens de gagner le jackpot. En prenant en compte cette nouvelle information, à combien Dursley estime-t-il la probabilité que Mme Potter soit une sorcière ?

Correction : Soit p la probabilité de gagner au loto, $1/p \simeq 19.10^6$. En admettant qu'une sorcière ne peut s'empêcher de jouer au loto, on a

$$\mathbb{P}(\text{Potter gagne au loto} \mid \text{Potter est une sorcière}) = 1.$$

Ainsi, $\mathbb{P}(\text{Potter gagne au loto}) = p * (999/1000) + 1 * 1/1000$, donc

$$\mathbb{P}(\text{Potter est une sorcière} \mid \text{Potter gagne au loto}) = \frac{1/1000}{p * (999/1000) + 1 * 1/1000}.$$

Comme $p \ll 1/1000$, cette valeur est très proche de 1. Dursley est quasiment sur que Potter est une sorcière.

Les limites de cette analyse :

- Mme Potter aurait sans doute déjà utilisé son pouvoir depuis longtemps...
- La probabilité $1/1000$ semble faible, mais pour un fait aussi improbable que celle d'être une sorcière, c'est énorme.
- S'il applique mal les probabilités, Dursley risque d'en déduire que toutes les personnes qui gagnent au loto sont des sorcier.e.s.

Exercice 7. Soit Ω un ensemble fini et notons V l'espace vectoriel réel des fonctions bornées de Ω dans \mathbb{R} . Soit $E : V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire sur L vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) pour toute fonction bornée et positive f , on a $E(f) > 0$
- (ii) $E(\mathbb{1}_\Omega) = 1$ où $\mathbb{1}_\Omega$ est la fonction constante égale à 1.

Montrer qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans Ω telle que $E(f) = \mathbb{E}(f(X))$ pour tout $f \in V$.

Correction : Pour tout $\omega \in \Omega$, prenons $\mathbb{P}(X = \omega) = p_\omega = E(\mathbb{1}_{\{\omega\}})$. Alors $\mathbb{1}_{\{\omega\}} \geq 0$ donc $p_\omega \geq 0$, et

$$\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = E(\mathbb{1}_\Omega) = 1$$

donc il s'agit bien d'une loi de probabilité. Par linéarité de E , on a bien

$$E(f) = \sum_{\omega} f(\omega)\mathbb{P}(X = \omega) = \mathbb{E}(f(X)).$$

Exercice 8. Formule de Poincaré

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé (fini) et soient $A_1, \dots, A_n \subset \Omega$ des événements.

1. On note $\mathbb{1}_A$ la fonction indicatrice de A . Montrer que $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$ et que $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$.
2. Montrer que $(\bigcup_{i=1}^n A_i)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$

3. En déduire que

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}}$$

4. Démontrer la formule d'inclusion-exclusion de Poincaré :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) &= \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(\cap_{i=1}^n A_i) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}). \end{aligned}$$

Correction :

1. Le produit $\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$ vaut 1 si et seulement si les deux termes sont égaux à 1, c'est-à-dire $x \in A \cap B$ et vaut 0 sinon, donc il est égal à $\mathbb{1}_{A \cap B}(x)$. D'autre part $1 - \mathbb{1}_A(x)$ vaut 1 si et seulement si $x \notin A$ et zéro sinon, donc $1 - \mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_{A^c}(x)$.
2. Clair car la négation de "il existe" est "pour tout".
3. On a

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{1}_{\cup A_i} &= \mathbb{1}_{\cap A_i^c} \text{ d'après les questions 1 et 2} \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i^c} \text{ d'après la question 1} \\ &= \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{1}_{A_i}) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \prod_{l=1}^k (-\mathbb{1}_{A_{i_l}}) \text{ en développant le produit} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{\cap_{l=1}^k A_{i_l}} \text{ encore d'après la question 1.} \end{aligned}$$

Le terme $k = 0$ est simplement 1, d'où la formule de l'énoncé.

4. C'est une conséquence immédiate de la formule précédente et de

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A).$$