Probabilités discrètes et Statistiques descriptives

L2 Université Lyon 1 2018

TD Feuille 9

Exercice 1. Loi Normale et intervalle de confiance Soit X une variable aléatoire de loi normale de paramètres (m, σ^2) et N une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

1. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $X \simeq aN + b$.
2. En utilisant le fait que l'intégrale de la densité de X vaut 1, calculer $\mathbb{E}[X]$ et $Var[X]$.
3. On note $F(t) = \mathbb{P}(N < t)$ la fonction de répartition de N. On fixe deux réels s et t. Exprimer $\mathbb{P}(m - t < X < m + t)$ en fonction des valeurs de F sur des réels positifs.

On fournit les valeurs suivantes :

t	0,75	1,64	1,96	2,58
F(t)	0,77	0,95	0,975	0,995

On considère une machine Lapinot qui sert à produire des oeufs en chocolat. La machine n'est pas parfaite, et chaque oeuf produit a une probabilité $1 - q$ d'être rond, indépendamment des autres oeufs produits. On cherche à évaluer q.

4. On produit 100 oeufs, et 44 sont ronds. Donner un intervalle de confiance asymptotique à 95% pour la valeur de q.
5. On sait de plus que la machine Lapinot peut être de deux types : Lapinot 8, avec $q = 0,4$, et Lapinot 10, avec $q = 0,6$. On veut tester l'hypothèse H0 : "la machine est Lapinot 8" contre l'hypothèse H1 : "la machine est Lapinot 10". On décide d'accepter H0 si le nombre d'oeufs ronds est inférieur à 45 sur 100 oeufs produits. Majorer l'erreur de première espèce α et de seconde espèce β par $0,05$ et $0,23$ respectivement. On rappelle que
$$\alpha = \mathbb{P}(\text{On refuse H0} \mid H0\ )$$
$$\beta = \mathbb{P}(\text{On accepte H0} \mid H1\ ).$$
6. On considère un lot de 10 000 machine Lapinot, toutes de type 10 sauf une qui est de type 8. On prend une de ces machines au hasard, et on la teste sur 100 oeufs. On obtient 44 oeufs ronds. La probabilité qu'il s'agisse de la machine de type 8 est-elle supérieure à 95% ?

Exercice 2. Queue de Gaussienne Soit N une variable aléatoire de loi normale de paramètres $(0, 1)$.

1. Montrer que $\int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ est négligeable devant $\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ quand x tend vers $+\infty$.
2. En déduire que, quand x tend vers $+\infty$, $\mathbb{P}(N \geq x)$ et $\frac{1}{2x} e^{-\frac{x^2}{2}}$ sont équivalents.

Exercice 3. Soit T une variable aléatoire continue de loi exponentielle de paramètre λ. Trouver la loi de la variable aléatoire discrète $\lfloor T \rfloor$ (partie entière de T).

Exercice 4. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}$ de même densité f, qui est supposée continue en 0. On suppose que la loi du vecteur aléatoire (X, Y) est invariante par rotation. Montrer que X et Y suivent une loi normale centrée.

Exercice 5. On considère deux variables aléatoires exponentielles T_0 et T_1 de paramètres distincts λ et μ. On tire au hasard une variable aléatoire L de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ indépendante de T_0 et T_1. On considère $Z = T_L$.

1. Calculer $\mathbb{P}(Z > a)$.
2. On fixe $b > 0$. Montrer que la fonction $t \to \mathbb{P}(Z > a + t \mid Z > t)$ est strictement croissante. Que cela signifie-t-il ?
3. On pourrait considérer plus de lois $T_0, T_1, T_2, ..., T_n$ et considérer T_L où L est à valeurs dans $\{0, ..., n\}$. Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai ? Peut-on encore généraliser ?

Exercice 6. Transformée de Laplace Pour une variable aléatoire X on note L_X et on appelle "transformée de Laplace de X", la fonction décrite par :

$$L_X : z \longrightarrow \mathbb{E}[e^{zX}]$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite iid de variable de loi de Bernouilli $\frac{1}{2}$, et N une variable de loi normale de paramètres $(0,1)$.

1. Calculer L_N.
2. On note $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$. Calculer $L_{\frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}/2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que pour tous $z \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} L_{\frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}/2}}(p) = L_N(z)$$