Probabilités discrètes et statistiques descriptives **L2 Université Lyon 1 2018-2019**

TD Feuille 4

Exercice 1. Soient A, B et C trois événements d'un espace probabilisé Ω. Démontrer la *formule du crible* :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

On pourra commencer par le cas où $C = \emptyset$. Cette formule vous rappelle-t-elle quelque chose ?

Exercice 2. Soit A et B deux événements tels que $P(A) = 0.3$ et $P(A \cup B) = 0.5$. Trouver $P(B)$ quand :

(a) A et B sont indépendants ;

(b) A et B sont incompatibles ;

(c) $P(A \mid B) = 0.1$;

(d) $P(B \mid A) = 0.4$.

Exercice 3. On lance deux pièces équilibrées de manière indépendante. On considère les événements A : « la première pièce donne face » ; B : « la deuxième pièce donne face » et C : « les deux pièces donnent le même résultat ». Montrer que les événements A, B et C sont indépendants deux à deux mais pas mutuellement indépendants.

Exercice 4. Deux chauffeurs de bus se relaient sur la même ligne. Lors d'une grève, le premier a 60 % de chances de faire grève et le second 80 %. Quelle est la probabilité pour que pendant la prochaine grève, un seul des deux chauffeurs fasse grève ?

Exercice 5. Pour se rendre à la Doua, une étudiante a le choix entre quatre itinéraires : A, B, C et D. La probabilité qu'elle choisisse A (respectivement B, C) est $1/3$ (respectivement $1/4$, $1/12$). La probabilité d'arriver en retard en empruntant le chemin A (respectivement B, C) est $1/20$ (resp. $1/10$, $1/5$). En empruntant le chemin D elle n'est jamais en retard.

1. Calculer la probabilité que l'étudiante arrive en retard.
2. Un jour donné, l'étudiante est en retard. Quelle est la probabilité qu'elle ait emprunté l'itinéraire C ?

Exercice 6. On me dit : « 20 % des tués lors d'un accident de la route, n'avaient pas attaché leur ceinture de sécurité. » Je réponds : « Il y a donc moins de risque à ne pas mettre sa ceinture. » Expliquez quels sont les pourcentages qu'il faudrait connaître pour raisonner plus proprement !

Exercice 7. Un nouveau vaccin a été testé sur 12 500 personnes ; 75 d'entre elles, dont 35 femmes enceintes, ont eu des réactions secondaires nécessitant une hospitalisation. Parmi les 12 500 personnes testées, 680 personnes sont des femmes enceintes.

1. Quelle est la probabilité pour une femme enceinte, d'avoir une réaction secondaire si elle reçoit un vaccin ?
2. Quelle est la probabilité pour une personne non enceinte d'avoir une réaction secondaire ?

Exercice 8. Dans une jardinerie : 25 % des plantes ont moins d'un an, 60 % ont de 1 à 2 ans, 25 % ont des fleurs jaunes, 60 % ont des fleurs roses, 15 % ont des fleurs jaunes et moins d'un an, 3 % ont plus de 2 ans et n'ont ni fleurs jaunes, ni fleurs roses. 15 % de celles qui ont de 1 à 2 ans, ont des fleurs jaunes, 15 % de celles qui ont de 1 à 2 ans, n'ont ni fleurs jaunes ni fleurs roses. On suppose que les fleurs ne peuvent pas être à la fois jaunes et roses.

On choisit une plante au hasard dans cette jardinerie.

1. Quelle est la probabilité qu'elle ait moins d'un an et des fleurs roses ?
2. Quelle est la probabilité qu'elle ait des fleurs roses, sachant qu'elle a plus de 2 ans ?
3. Quelle est la probabilité qu'elle ait plus de deux ans et des fleurs jaunes ?

Exercice 9. Dans un jeu en réseau massivement multijoueur, trois joueurs lancent une attaque contre un même ennemi. On observe que cet ennemi tombe sous les tirs réussis de deux des trois joueurs exactement. On estime la valeur d'un joueur par sa probabilité d'atteindre la cible. Ces probabilités sont respectivement $1/4$, $1/2$ et $3/4$ pour ces joueurs. Trouver pour chacun des joueurs la probabilité d'avoir raté leur attaque.

Exercice 10. Soient $M_1, M_2, \ldots, M_n$ des personnes qui se transmettent une information binaire. La première personne, M_1, reçoit la bonne information (notons-la I). Elle la transmet à la deuxième personne M_2 et ainsi de suite jusqu'à M_n qui transmet finalement l'information. Malheureusement, à chaque fois que l'information est transmise, il y a une probabilité p que l'information soit changée en son contraire. En tenant compte du fait que deux changements rétablissent la vérité, quelle est la probabilité pour que M_3 ait le bon message ?

On note p_i la probabilité pour que l'information initiale soit correctement transmise par M_i. Exprimer p_i en fonction de p_{i-1} (pour $i \geq 2$). En déduire p_n. Que se passe-t-il quand n tend vers l'infini ?

Exercice 11. Une boîte contient 7 pièces détachées dont 2 en aluminium et 5 en cuivre. Une autre boîte contient 3 pièces en aluminium et 2 en cuivre. On choisit l'une des boîtes au hasard. On tire une pièce de cette boîte et on la met dans l'autre boîte. Puis on tire une pièce de la seconde boîte. Calculer la probabilité pour que les deux pièces tirées soient du même métal.