Probabilités discrètes et statistiques descriptives

L2 Université Lyon 1 2018

TD Feuille 7

Exercice 1. a) Soit X une v.a. de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer la loi de $Y = -X$.

b) Soit X une v.a. de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Soient deux réels a et b avec $a \neq 0$. Déterminer la loi de $Y = aX + b$.

c) Soit X une v.a. de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Quelle est la loi de $Z = \frac{X-m}{\sigma}$?

d) Soit Z de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Grâce à la table, déterminer $P[-2 \leq Z \leq 2]$. Soit X de loi $\mathcal{N}(5, \sigma^2 = 2)$. Calculer la probabilité $P[X > 4]$.

Exercice 2. Pour chacune des lois usuelles suivantes, tracer la densité et calculer la fonction de répartition. Calculer l'espérance et la variance.

	notation	densité f	espérance	variance
loi uniforme sur $[a,b]$	$\mathcal{U}([a,b])$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
loi exponentielle	$\mathcal{E}(\lambda)$	$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda \exp(-\lambda x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
loi normale standard	$\mathcal{N}(0,1)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$	0	1
loi normale	$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$	m	σ^2

Exercice 3. Dans une station service, la demande en essence hebdomadaire (en centaine de milliers de litres) est une variable aléatoire X de densité :

$$f : x \mapsto \begin{cases} c(1-x)^4 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer c.
2. Déterminer la fonction de répartition de X
3. Calculer l'espérance et la variance de X
4. On suppose que l'essence est livrée chaque mardi à 11h15. Quelle doit être la capacité du réservoir de la station essence pour que la probabilité qu'il n'y en ait pas assez pour la semaine soit inférieur à 10^{-5}.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Quelle est la loi de la variable :

$$T = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - X)$$

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire continue. On suppose que F_X, sa fonction de répartition, est bijective. Soit U est une variable uniforme sur $[0,1]$. Quelle est la loi de $F_X^{-1}(U)$?

Exercice 6. La largeur (en cm) d'une fente dans une pièce fabriquée en aluminium est distribuée selon une loi normale de paramètres $\mu = 2$ et $\sigma = 0,012$. Les limites de tolérance sont données comme étant $2,000 \pm 0,012$. Quel sera le pourcentage de pièces défectueuses ?

Exercice 7. Je lance 100 fois une pièce de monnaie et je tombe 43 fois sur FACE. Modéliser cette expérience en donnant l'ensemble fondamental, la loi de la variable aléatoire qui nous intéresse (précisez son espérance et sa variance). Par quelle loi peut-on l'approcher ? Donner un intervalle de confiance pour la probabilité p de tomber sur FACE. Conclusion ?

Exercice 8. On cherche à estimer le taux de participation pour les prochaines élections en interrogeant des citoyens de plus de 18 ans. Indiquer comment on calcule un intervalle de confiance pour le taux de participation.

On souhaite que cet intervalle soit de longueur inférieure à 1%. Combien doit-on interroger de personnes ?

Exercice 9. Dans ce problème, les durées des trajets sont supposées suivre des lois normales.

1. La directrice d'un laboratoire de mathématique habite dans la ville A. Elle part de chez elle à 8 h 45 et se rend en voiture à son bureau, qui ouvre à 9 h. La durée de son trajet est, en moyenne, de 13 minutes, avec un écart-type de 3 minutes. Quelle est la probabilité que la directrice arrive en retard ?
2. Le secrétaire de la directrice habite en A, elle va au bureau avec le train de 8 h 32 ; il descend à la station B. Il prend ensuite le bus qui part de B à 8 h 50 (sans attendre le train), pour aller de B à son bureau. La durée du trajet en train a pour moyenne 16 minutes, pour écart-type 2 minutes, et la durée du trajet en bus a pour moyenne 9 minutes et pour écart-type 1 minute. Les durées de trajet en train et en bus sont indépendantes. Quelle est la probabilité que le secrétaire arrive à l'heure ?
3. Quelle est la probabilité pour que la directrice ou le secrétaire (c'est-à-dire l'une au moins des deux) arrive à l'heure, les durées des trajets de la directrice ou du secrétaire étant supposées indépendantes ?