Probabilités discrètes et statistiques descriptives

L2 Université Lyon 1 2018-2019

TD 1 : Dénombrement et combinatoire

Exercice 1. Soient A, B, C des ensembles finis. Montrer que

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - \Big(|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|\Big) + |A \cap B \cap C|.$$

Exercice 2. Soit $\Omega = \{a, b, c\}$ (avec a, b et c distincts). Donner :

1. l'ensemble $P(\Omega)$ des parties de Ω ;
2. l'ensemble des permutations de Ω ;
3. l'ensemble des arrangements de Ω ;
4. l'ensemble des combinaisons de Ω ;
5. l'ensemble des arrangements avec répétitions d'ordre (3,2,1) de Ω ;
6. l'ensemble des combinaisons avec répétitions de 5 éléments de Ω.

Exercice 3. Un clavier de 9 touches permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de 3 chiffres distincts ou non.

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ A & B & C \end{matrix}$$

1. Combien de codes différents peut-on former ?
2. Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 1 ?
3. Combien y a-t-il de codes comportant au mois une fois le chiffre 1 ?
4. Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?

Exercice 4.

Quatre garçons et deux filles s'assoient sur un banc.

1. Quel est le nombre de dispositions possibles ?
2. Même question si les garçons sont d'un coté et les filles de l'autre.
3. Même question si chaque fille est intercalée entre deux garçons.
4. Même question si les filles veulent rester l'une à coté de l'autre.

Exercice 5.

1. Étant donnés deux entiers positifs n et k avec $k \leq n - 1$, montrer la relation du triangle de Pascal :
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$
2. Pour $k \leq n$, montrer la relation d'absorption :
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$
En déduire la valeur de
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}.$$

Exercice 6. L'équipe de football d'un grand club européen compte 1 Brésilien, 2 Espagnols, 2 Français, 4 Italiens et 2 Ivoiriens. En supposant que la feuille de match, numérotée de 1 à 11, ne mentionne que les nationalités des joueurs, donner le nombre de feuilles de match possibles.

Exercice 7. ***

1. Soient a et b deux réels et n un entier supérieur à 2. En écrivant par récurrence
$$(a+b)^n = \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\{0,1\}^n} \prod_{j=1}^{n} \varepsilon_{i_j}$$
avec $\varepsilon_0 = a$ et $\varepsilon_1 = b$, retrouver la formule du binôme de Newton.
2. Montrer que pour tout $n > 0$,
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^n = 0.$$
3. Montrer l'identité de Vandermonde : pour $m, n \geq 1$ et $0 \leq k \leq m+n$,
$$\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j} = \binom{n+m}{k}$$
4. Étant donnés deux entiers $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$, montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 8. Calculer le nombre de mots (ayant un sens ou pas) que l'on peut fabriquer avec les lettres du mot ETRENNE. Même question avec les lettres de ENTENTE.

Exercice 9. *** On répartit p serviettes dans n tiroirs numérotés de 1 à n.

1. Calculer le nombre de ces répartitions selon que l'on considère que les serviettes sont toutes discernables ou toutes identiques.
2. Parmi ces répartitions, quel est le nombre de celles pour lesquelles aucun tiroir n'est vide ?

Exercice 10. ** On extrait simutanément cinq cartes d'un jeu de 32. Cet ensemble de cinq cartes est appelé une *main*.

1. Combien y a-t-il de mains différentes possibles ?
2. Dénombrer les mains de cinq cartes contenant :
   (a) un carré (quatre cartes de même valeur) ;
   (b) deux paires (de hauteurs distinctes) ;
   (c) un full (trois cartes de même valeur, et deux autres de même valeur ; par exemple, 3 rois et 2 as) ;
   (d) un brelan (trois cartes de même valeur, sans full ni carré) ;
   (e) une quinte (cinq cartes de même couleur qui se suivent dans l'ordre croissant).