Probabilités discrètes et Statistiques descriptives **L2 Université Lyon 1 2018**

TD 1 : Dénombrement et combinatoire, correction partielle

Exercice 1. cf TD

Exercice 2. cf TD.

Exercice 3. cf TD.

Exercice 4.

4 garçons et 2 filles s'assoient sur un banc.

On a deux réponses possibles selon qu'on considère les individus discernables, il s'agit alors de permutations des individus sur le banc qui retient l'ordre des positions (ou, ce qui est plus discutable : indiscernables, il s'agit alors d'arrangements avec répétitions de 4G et 2F)

1. Quel est le nombre de dispositions possibles ? cas discernable 6 !, (cas indiscernable $\frac{6!}{4!2!} = 15$).
2. Même question si les garçons sont d'un coté et les filles de l'autre : cas discernable 4 ! permutations des garçons de leur côté, 2 ! permutations des filles et 2 côtés possibles soit au total :2.2 !.4 !=96 (cas indiscernable : 2 selon le côté des filles et des garçons)
3. Même question si chaque fille est intercalée entre deux garçons.
   cas discernable 4 ! permutations des garçons à leurs places, 2 ! permutations des filles et les 3 dispositions du cas indiscernable soit au total : 3.2 !4 !=146 (cas indiscernable : 3 façons pour avoir des groupes GFG où une fille entourée de 2 garçons : GFGGFG, GFGFGG, GGFGFG)
4. Même question si les filles veulent rester l'une à coté de l'autre : cas discernable on place les 5 positions de la première fille comme dans le cas indiscernable puis 4 ! permutations des garçons puis 2 ! permutations des filles (cas indiscernable : on place la première fille parmi les 5 début du groupe de deux filles soit 5 positions).

A remarquer : on fait le calcul indiscernable dans tous les cas et si on calcule les probabilités, les deux modèles donnent la même réponse (vu que les évènements ont un sens dans les deux modèles car ils ne discernent pas les individus autrement que comme garçons ou fille).

Exercice 5. cf TD.

Exercice 6. L'équipe de football d'un grand club européen compte 1 Brésilien, 2 Espagnols, 2 Français, 4 Italiens et 2 Ivoiriens. En supposant que la feuille de match, numérotée de 1 à 11, ne mentionne que les nationalités des joueurs, donner le nombre de feuilles de match possibles.

Avant l'oubli du nom des joueurs, comme l'ordre compte, il s'agit de permutations de 11 joueurs, soit 11 ! possibilités, mais ce n'est pas la réponse à la question.

Si le nom des joueurs est effacé (comme l'indique le fait que l'on ne donne que la nationalité) de la feuille de match, il ne reste que le nombre d'arrangement avec répétition d'ordre (1,2,2,4,2) soit :$\frac{11!}{1!2!2!4!2!}$.

Exercice 7. *** cf TD

Exercice 8. Calculer le nombre de mots que l'on peut fabriquer avec les lettres de ETRENNE. Même question avec les lettres de ENTENTE.

Dans un énoncé plus précis, on ajouterait "en utilisant toutes les lettres, exactement le même nombre de fois sans importance de l'existence du mot dans aucune langue". Sinon, certains TDs ont pu voir la réponse plus compliquée avec tous les sous-mots, quand on doit sommer sur la longueur et la composition du mot.

Quand on comprend la solution la plus simple, il s'agit d'un nombre d'arrangement avec répétition de 3 E, 2N , 1T et 1R pour ETRENNE soit $\frac{7!}{3!2!}$

Quand on comprend la solution la plus simple, il s'agit d'un nombre d'arrangement avec répétition de 3 E, 2N et 2T pour ENTENTE soit $\frac{7!}{3!2!2!}$

Exercice 9. *** cf TD

Exercice 10. ** On extrait simultanément 5 cartes d'un jeu de 32. Cet ensemble de 5 cartes est appelé une "main".

1. Combien y a-t-il de mains différentes possibles ?

   Les tirages de main correspondent à prendre une partie de 5 cartes parmi les 32, soit $C_{32}^5 = \frac{32!}{5!27!} = 201376$ possibilités.

2. Dénombrer les mains de 5 cartes contenant :

   (a) un carré (quatre cartes de même valeur)

   (b) deux paires distinctes (on suppose que ce n'est pas un full)

   (c) un full (trois cartes de même valeur, et deux autres de même valeur. Exemple : 3 rois et 2 as)

   (d) un brelan (trois cartes de même valeur, sans full ni carré)

   (e) une quinte (5 cartes de même couleur, se suivant dans l'ordre croissant)

   Dans tous les cas, sauf le dernier, on va compter d'abord les tirages de "type de cartes" (numéro ou valet dame roi as) donnant les mains cherchées, puis pour chaque type, le nombre d'ensembles de cartes du type donné. (Ensemblistement, on réunie nos tirages par une union disjointe sur les types de cartes apparaissant où on oublie les "couleurs" pic,treffle,coeur,carreau des cartes).

   Pour compter les types de carte correspondant, on l'interprète comme arragement avec répétition où chacun des 8 types de carte se voit affecter un nombre dans $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ selon le nombre de fois que l'on prend ce type de carte. On va donc compter des arrangements avec répétition : les suites de longeurs 8 (peu importe l'attribution du numero de 1 à 8 pour chaque carte) d'objet de Ω (qui donnera 0 uplet, 1 uplet, paire, etc, carré). On peut aussi trouver ce nombre de type sans arrangement avec répétition.

   (a) un carré (quatre cartes de même valeur) les types sont la valeur de la carte tiré par 4 et la valeur de la carte tirée seule RRRRV, donc l'arrangement avec répétition est d'ordre (6,1,0,0,1) (6 0-uplet pour les cartes non prises, 1 1-uplet 1 quadruplet). total $\frac{8!}{6!1!1!} = 8.7$ types de carte

   Par type de carte il faut tirer 4 carte du type quadruplet parmi 4 et 1 carte du type 1-uplet soit $C_4^4 C_4^1 = 4$ façons

   Au total, $8.7.4 = 224$ tirages de carrés.

   (b) deux paires distinctes (on suppose que ce n'est pas un full) Les tirages sont de type RRVVD soit ordre (5,1,2,0,0), (5 0-uplets pour les types de cartes non prises, 1 1-uplet, 2 paires) total $\frac{8!}{5!2!1!} = 8.7.6/2$ types de tirage.

   Par type de carte il faut tirer 2 cartes du type R parmi 4, 2 cartes du type V et 1 carte du type 1-uplet D soit $C_4^2 C_4^2 C_4^1 = 6^2 4$ façons.

   Total $8.7.6^3.2 = 24192$ tirages de 2 paires distinctes non full.

   (c) un full (trois cartes de même valeur, et deux autres de même valeur. Exemple : 3 rois et 2 as)

   -ordre (6,0,1,1,0) soit $\frac{8!}{6!1!1!} = 8.7$ types de cartes donnant un full

   Pour chaque type $C_4^3 C_4^2 = 4.6 = 24$ ensembles de cartes de type donné, total 8.7.24=1344 tirages de full.

   (d) un brelan (trois cartes de même valeur, sans full ni carré)

   Ordre (5,2,0,1,0) soit $\frac{8!}{5!2!1!} = 8.7.6/2$ types de cartes donnant un brelan (comme pour les paires disctinctes) Pour chaque type $C_4^3 C_4^1 C_4^1 = 4^3 = 64$ ensembles de cartes de type donné, total 8.7.6.32=10752 tirages de brelan.

   (e) une quinte (5 cartes de même couleur, se suivant consécutivement dans l'ordre croissant)

   La quinte est déterminé par l'une des 4 couleurs possibles, et 8-4=4 plus haute carte pour la quinte. Soit 16 possibilités de tirages de quinte.