**Probabilités discrètes et statistiques descriptives**

**L2 Université Lyon 1 2019-2020**

# TD 1 : Dénombrements et combinatoire

**Exercice 1.** Soient $A, B, C$ des ensembles finis. Montrer que

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - \Big(|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|\Big) + |A \cap B \cap C|.$$

**Exercice 2.** Soit $\Omega = \{a, b, c\}$ (avec $a, b$ et $c$ distincts). Donner :

1. l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ des parties de $\Omega$ ;
2. l'ensemble des permutations de $\Omega$ ;
3. l'ensemble des arrangements de $\Omega$ ;
4. l'ensemble des combinaisons de $\Omega$ ;
5. l'ensemble des arrangements avec répétitions d'ordre (3,2,1) de $\Omega$.

**Exercice 3.**

1. Les dix touches numériques d'un téléphone permettent de composer le code PIN, formé de quatre chiffres. Combien de codes différents peut-on former ?
2. Le mot de passe d'un ordinateur est composé de six lettres minuscules (on utilise l'alphabet latin sans accent). Combien de mots de passe différents peut-on former ?

**Exercice 4.** Le clavier de neuf touches dessiné ci-dessous permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de trois chiffres distincts ou non.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ A & B & C \end{array}$$

1. Combien de codes différents peut-on former ?
2. Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 1 ?
3. Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 1 ?
4. Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?

**Exercice 5.**

Quatre garçons et deux filles s'assoient sur un banc. Pour chaque question, on calculera le nombre de dispositions en distinguant les personnes par leur prénom (ex. : Anne-Élise-Jérémy-Jérôme-Morgane-Yoann) et en ne conservant que l'information de leur genre (ex. : F-G-G-F-G-G).

1. Quel est le nombre de dispositions possibles ?
2. Même question si les garçons sont d'un coté et les filles de l'autre.
3. Même question si chaque fille est intercalée entre deux garçons.
4. Même question si les filles veulent rester l'une à côté de l'autre.

**Exercice 6.** L'équipe de football d'un grand club européen compte 2 Algériens, 1 Espagnol, 2 Français, 4 Italiens et 2 Ivoiriens. En supposant que la feuille de match, numérotée de 1 à 11, ne mentionne que les nationalités des joueurs, donner le nombre de feuilles de match possibles.

**Exercice 7.** Calculer le nombre de mots de sept lettres (ayant un sens ou pas) que l'on peut fabriquer avec les lettres du mot ETRENNE. Même question avec les lettres de ENTENTE.

**Exercice 8.**

1. Étant donnés deux entiers positifs $n$ et $k$ avec $k \leq n-1$, montrer la relation du triangle de Pascal :
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$
2. Pour $k \leq n$, montrer la relation d'absorption :
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$
En déduire la valeur de
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \quad \text{et de} \quad \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}.$$

**Exercice 9.** ***

1. Soient $a$ et $b$ deux réels et $n$ un entier naturel non nul. En écrivant par récurrence
$$(a+b)^n = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\{0,1\}^n} \prod_{j=1}^{n} \varepsilon_{i_j}$$
avec $\varepsilon_0 = a$ et $\varepsilon_1 = b$, retrouver la formule du binôme de Newton.
2. Montrer que pour tout entier naturel non nul $n$,
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = 0.$$
3. Montrer l'identité de Vandermonde : pour $m, n \geq 1$ et $0 \leq k \leq m+n$,
$$\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j} = \binom{n+m}{k}$$
4. Étant donnés deux entiers $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$, montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

**Exercice 10.** *** On répartit $p$ serviettes dans $n$ tiroirs numérotés de 1 à $n$.

1. Calculer le nombre de ces répartitions selon que l'on considère :
   (a) que les serviettes sont toutes discernables ; (b) que les serviettes sont toutes identiques.
2. Parmi ces répartitions de serviettes, quel est le nombre de celles pour lesquelles aucun tiroir n'est vide ? On ne fera le calcul que dans le cas où les serviettes sont indiscernables.

**Exercice 11.** ** On extrait simutanément cinq cartes d'un jeu de cinquante-deux. Cet ensemble (non ordonné) de cinq cartes est appelé une *main*.

1. Combien y a-t-il de mains différentes possibles ?
2. Dénombrer les mains de cinq cartes contenant :
   (a) un carré (quatre cartes de même valeur) ;
   (b) deux paires (de hauteurs distinctes) ;
   (c) un full (trois cartes de même valeur et deux autres de même valeur ; par exemple, trois rois et deux as) ;
   (d) un brelan (trois cartes de même valeur, sans full ni carré) ;
   (e) une quinte (cinq cartes de même couleur qui se suivent dans l'ordre croissant).