Probabilités discrètes et statistiques descriptives

L2 Université Lyon 1 2018-2019

TD 2 : Probabilités sur des ensembles finis

Exercice 1. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$. On suppose que

$$\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{4}.$$

Calculer $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X^2)$.

Exercice 2.

1. On lance deux dés équilibrés (à 6 faces). Quelle est la probabilité que la somme des deux résultats soit égale à 7 ? Quelle est l'espérance de la somme ?
2. On tire deux cartes (sans remise) d'un paquet de six cartes numérotées de 1 à 6. Quelle est la probabilité que la somme des deux résultats soit égale à 7 ? Quelle est l'espérance de la somme ?
3. Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour avoir plus d'une chance sur deux d'obtenir au moins un 6 ?
4. Lequel des deux événements suivants est plus probable : obtenir au moins une fois un six en 4 lancers d'un dé ou obtenir au moins une fois un double-six en 24 lancers de deux dés ?

Exercice 3.

1. On possède deux pièces truquées différentes, la première obtient face avec probabilité p, la seconde avec probabilité q.
   Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois face ?
2. Deux archers tirent sur n cibles, une flèche par cible et par archer. Le premier touche avec probabilité p, le second avec probabilité q.
   Pour k entre 0 et 2, quelle est la probabilité que k cibles au moins soient épargnées ?

Exercice 4. Une urne contient des boules numérotées de 1 à 20. On tire sans remise trois boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins une boule ait un numéro supérieur à 17 ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros en ordre croissant ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros successifs en ordre croissant ?

Exercice 5. * On tire n fois une pièce truquée qui tombe sur face avec probabilité p. On cherche à calculer P, la probabilité d'obtenir un nombre pair de fois face.

1. Exprimer $\frac{1}{2}\big((x+y)^n + (y-x)^n\big)$ à l'aide du binôme de Newton.
2. En déduire une expression de P. Que se passe-t-il quand p est très proche de 1 ?

Exercice 6. Une urne contient b boules bleues et r boules rouges.

1. On procède à n tirages successifs avec remise. Soit k un entier.
   (a) Quelle est la probabilité de tirer exactement k fois une boule bleue ?
   (b) Quelle est la probabilité de tirer au plus k boules rouges ?
2. On retire maintenant les boules une à une de l'urne sans les y remettre. (On prendra $k \leq b, r$.)
   (a) Quelle est la probabilité que la première boule rouge à être retirée soit la $(k+1)$-ième boule ?
   (b) Quelle est la probabilité que la dernière boule à être retirée soit rouge ?

Exercice 7. * Une urne contient n boules blanches et une boule noire. On suppose que $n+1$ personnes tirent, chacune à leur tour, une boule dans l'urne. La personne qui a la boule noire a perdu. Le jeu est-il équitable ?

Exercice 8. Dénombrabilité et nombres algébriques

On note $\mathbb{Q}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$, et

$$\mathcal{A} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists P \in \mathbb{Q}[X],\ Q(x) = 0\right\}$$

l'ensemble des nombres algébriques.

1. Montrer que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable.
2. Montrer qu'il existe des réels non algébriques.

Exercice 9. Dénombrabilité et ensembles finis

1. Montrer que l'ensemble des parties *finies* de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
2. On considère l'ensemble $\ell_0(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $u_n = 0$ pour tout n assez grand. Montrer que cet ensemble est dénombrable.
3. Montrer que l'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ de toutes les suites entières est non dénombrable.
   Indication : obtenir une injection $A \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ pour un ensemble non dénombrable A vu en cours.
4. Soit $A \subset]0, \infty[$ un ensemble non dénombrable de réels strictement positifs. Montrer que pour tout $C > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et des réels distincts $a_1, \ldots, a_n \in A$ tels que $\sum_{i=1}^n a_i > C$.

Exercice 10. Dénombrabilité et fonctions croissantes

1. Montrer qu'un ensemble d'intervalles ouverts non vides deux à deux disjoints de $\mathbb{R}$ est au plus dénombrable.
2. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une application monotone d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est au plus dénombrable.