Probabilités discrètes et Statistiques descriptives **L2 Université Lyon 1 2018**

TD 2 : Probabilités sur des ensembles finis Correction partielle

Exercice 1. **Exercice 2.** **Exercice 3.** cf TD. **Exercice 4.** cf TD. **Exercice 5.** * cf TD.

Exercice 6. Une urne contient b boules bleues et r boules rouges.

1. On procède à n tirages successifs avec remise. L'ensemble des tirages est donc $\Omega = [\![1, b+r]\!]^n$ $Card(\Omega) = (b+r)^n$ (l'ensemble des arrangements avec répétition sans ordre fixé). On dira que les boules bleues sont celles de $[\![1, b]\!]$; les autres les rouges. On munit Ω de la probabilité uniforme.

   (a) Quelle est la probabilité de tirer exactement k fois une boule bleue ? Notons A_k l'évènement cherché.

   On décrit l'évènement comme une union disjointe sur les parties $P \in P_k([\![1, n]\!])$ décrivant les positions des boules tirées bleues. L'évènement A_P obtenir des boules bleues aux positions de P se décrit comme $A_P = \prod_{i \in P} [\![1, b]\!] \times \prod_{j \in P^c} [\![1+b, b+r]\!] \sim [\![1, b]\!]^{Card(P)} \times [\![1+r, b+r]\!]^{Card(P^c)}$, on a donc

   $$P(A_P) = \frac{Card(A_P)}{Card(\Omega)} = \frac{b^{Card(P)} r^{n-Card(P)}}{(b+r)^n}$$

   Enfin, $A_k = \cup_{P \in P_k([\![1,n]\!])} A_P$ donc comme l'union est disjointe :

   $$P(A_k) = \sum_{P \in P_k([\![1,n]\!])} P(A_P) = Card(P_k([\![1, n]\!])) \frac{b^{Card(P)} r^{n-Card(P)}}{(b+r)^n} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{b^k r^{n-k}}{(b+r)^n}.$$

   (b) Quelle est la probabilité de tirer au plus k boules rouges (soit au moins n-k bleues) ? Soit B l'évènement correspondant. On décrit B comme union disjointe :$B = \cup_{i=n-k}^{n} A_i$ d'où on déduit :

   $$P(B) = \sum_{i=n-k}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{b^i r^{n-i}}{(b+r)^n}$$

2. On retire maintenant les boules une à une de l'urne sans les y remettre. (On prendra $n \leq b, r$) L'espace des réalisations est maintenant $\Omega = Inj([\![1, n]\!], [\![1, b+r]\!])$ l'ensemble des injections des places de tirages vers l'ensemble des boules.

   (a) Quelle est la probabilité que la première boule rouge à être retirée soit la $k+1$-ième boule ?(avec $k+1 \leq n$. Soit C cet évènement, $\omega \in C$ vérifie la propriété que les k premières boules tirées sont bleues $\omega(i) \in [\![1, b]\!]$, $i \leq k$et la k+1-ième est rouge $\omega(k+1) \in [\![b+1, b+r]\!]$.
   Methode 1 : On décrit C comme une union disjointe sur les restrictions à $[\![1, k+1]\!]$

   $$C = \bigcup_{\nu \in Inj([\![1,k]\!],[\![1,b]\!]), l \in [\![b+1,b+r]\!]} C_{\nu,l}$$

   où $C_{nu,l} = \{\omega \in C : \omega|_{[\![1,k]\!]} = \nu, \omega(k+1) = l\} = Inj([\![k+2, n]\!], [\![1, b+r]\!] - Im(\nu) - \{l\})$. Les ensembles $[\![1, b+r]\!] - Im(\nu) - \{l\}$ ont toujours cardinal $b+r-k-1$ donc $Card(C_{\nu,l}) = A_{b+r-k-1}^{n-k-1}$. Donc

   $$P(C_{\nu,l}) = \frac{A_{b+r-k-1}^{n-k-1}}{A_{b+r}^{n}} = \frac{(b+r-k-1)!(b+r-n)!}{(b+r-n)!(b+r)!} = \frac{1}{A_{b+r}^{k+1}}$$

D'où par union disjointe :

$$P(C) = P(C_{\nu,l})Card(Inj([\![1,k]\!],[\![1,b]\!]))r = \frac{A_b^k r}{A_{b+r}^{k+1}}$$

Méthode 2 : On dit que la probabilité induite sur $\Omega_{k+1} = Inj([\![1,k+1]\!],[\![1,b+r]\!])$ par restriction au $k+1$ premiers tirages est encore uniforme (même calcul que pour $P(C_{\nu,l})$ ci-dessus). On décrit $C = Inj([\![1,k]\!],[\![1,b]\!]) \times [\![b+1,b+r]\!]$
D'où

$$P(C) = \frac{A_b^k \times r}{A_{b+r}^{k+1}}$$

(b) Quelle est la probabilité que la dernière boule à être retirée soit rouge ? Soit D l'évènement $D = \{\omega \in \Omega, \omega(n) \in [\![r+1,b+r]\!]\} = \cup_{l\in[\![b+1,b+r]\!]} D_l$
avec $D_l = \{\omega \in \Omega, \omega(n) = l\}$. D_l est en bijection par la restriction du tirage aux n-1 premières boules avec les $D_l \simeq Inj([\![1,n-1]\!],[\![1,b+r]\!] - \{l\})$ de sorte que $Card(D_l) = A_{b+r-1}^{n-1}$ soit $P(D_l) = \frac{A_{b+r-1}^{n-1}}{A_{b+r}^{n}} = \frac{1}{b+r}$.
Donc par union disjointe

$$P(D) = \sum_{l\in[\![b+1,b+r]\!]} \frac{1}{b+r} = \frac{r}{b+r}.$$

Il y a beaucoup d'autres façons de décrire ce nombre mais ce me semble être la plus simple.

Exercice 7. * cf TD. **Exercice 8.** Dénombrabilité et nombres algébriques cf TD.

Exercice 9. Dénombrabilité et ensembles finis

1. Montrons que l'ensemble des parties $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ *finies* de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
   On l'écrit comme union disjointe $\mathcal{P}_f(\mathbb{N}) = \cup_{k\in\mathbb{N}} P_k(\mathbb{N})$ des parties à k éléments. Or une partie à k éléments est dans un certain $[\![0,n]\!]$, donc on voit comme union non-disjointe $P_k(\mathbb{N}) = \cup_{n\geq k} P_k([\![0,n]\!])$. Cet ensemble est au plus dénombrable comme union dénombrable d'ensembles finis ($Card(P_k([\![0,n]\!]) = C_{n+1}^k$). Enfin, $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ est donc au plus dénombrable comme union dénombrable d'ensemble au plus dénombrable. Il est même infini car il contient une copie de $\mathbb{N}$ sous la forme des singletons donc il est (infini) dénombrable.
2. On considère l'ensemble $l_0(\mathbb{N},\mathbb{N})$ des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $u_n = 0$ pour tout n assez grand. Montrons que cet ensemble est dénombrable.
   On écrit cet ensemble comme union des ensembles $l_0([\![0,n]\!],\mathbb{N})$ des suites qui sont zéro à partir du rang $n+1$. Or $l_0([\![0,n]\!],\mathbb{N}) \simeq \mathbb{N}^{n+1}$ est donc dénombrable par le cours. Donc $l_0(\mathbb{N},\mathbb{N})$ est dénombrable comme union dénombrable d'ensembles dénombrables.
3. Montrons que l'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ de toutes les suites entières est non-dénombrable (indication : obtenir une injection $A \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ pour un ensemble non dénombrable A vu en cours).
   Comme $\{0,1\} \subset \mathbb{N}$ on a une injection $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et on a vu en cours que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \simeq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ donc $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est aussi non-dénombrable (refaisons une fois le raisonnement, si il était au plus dénombrable, on aurait une injection $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ qui se composerait avec l'injection ci-dessus pour donner une injection $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ ce qui contredit l'absence de surjections $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ du théorème de Cantor).
4. Soit $A \subset]0,\infty[$ un ensemble non dénombrable de réels strictement positifs. Montrons que pour tout $C > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et des réels distincts $a_1, ..., a_n \in A$ tels que $\sum_{i=1}^n a_i > C$. Sinon, par l'absurde, il existe C tel que pour tout n, tout $a_1, ..., a_n$ $\sum_{i=1}^n a_i \leq C$. SOit la famille $(a)_{a\in A}$ est sommable. On a vu qu'une famille sommable a un nombre au plus dénombrable de coefficient non-nul, une contradiction.

Exercice 10. Dénombrabilité et fonctions croissantes

1. Montrons qu'un ensemble d'intervalles ouverts non vides deux à deux disjoints de $\mathbb{R}$ est au plus dénombrable. En appliquant une bijection croissante de $\mathbb{R} \to]-1,1[$ par exemple $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$, on se ramène au même problème pour un ensemble A d'intervalles ouverts non vides de $]-1,1[$
   Un intervalle ouvert non vide est de la forme $]a,b[$. ON dit que la famille $(b-a)_{]a,b[\in A}$ est alors sommable car borné grâce à des sommes téléscopique par $1-(-1)=2$. Par le cours, la famille est donc au plus dénombrable.
2. Montrons que l'ensemble Ddes points de discontinuité d'une application monotone f d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est au plus dénombrable. En remplaçant f par $-f$ on suppose f croissante.
   Pour chaque point de discontinuité $d \in D$, f a une limite à droite $f(d^+)$ et une limite à gauche $f(d^-) < f(d^+)$ et l'ensemble d'intervalles $(]f(d^-), f(d^+)[)_{d\in D}$ est une famille d'intervalles ouverts non-vide (par def. des points de discontinuités) disjoints (par croissance de f si $d_1 < d_2$, $f(d_1^+) \leq f(d_2^-)$ ce qui implique $]f(d_1^-), f(d_1^+)[\cap]f(d_2^-), f(d_2^+)[=\emptyset)$. La question précédente dit que le cardinal de D est au plus dénombrable.