

TD 2 : Probabilités sur des ensembles finis

Exercice 1. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$. On suppose que l'on a $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 0) = 1/4$. Calculer $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X^2)$.

Exercice 2. On considère une variable aléatoire X , de loi binomiale $\mathcal{B}(5, 1/2)$. Quel est l'ensemble S des valeurs prises par X ? Calculer $\mathbb{P}(X = k)$ pour chaque $k \in S$. Calculer l'espérance et la variance de X .

Exercice 3. Pour chacune des expériences aléatoires suivantes, préciser l'ensemble Ω et construire une probabilité sur Ω .

1. On lance deux dés équilibrés (à 6 faces). Quelle est la probabilité que la somme des deux résultats soit égale à 7? Quelle est l'espérance de la somme?
2. On tire deux cartes (sans remise) d'un paquet de six cartes (numérotées de 1 à 6). Quelle est la probabilité que la somme des deux résultats soit égale à 7? Quelle est l'espérance de la somme?
3. Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour avoir plus d'une chance sur deux d'obtenir au moins un six?
4. Lequel des deux événements suivants est plus probable : « obtenir au moins une fois un six en 4 lancers d'un dé » ou « obtenir au moins une fois un double six en 24 lancers de deux dés »?

Exercice 4.

1. On possède deux pièces truquées différentes, la première obtient face avec probabilité p , la seconde avec probabilité q . On lance ces deux pièces successivement.
 - (a) Décrire l'ensemble Ω et construire une probabilité sur Ω (liée à la situation!).
 - (b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois face?
2. Deux archers tirent sur n cibles, une flèche par cible et par archer. Le premier touche avec probabilité p , le second avec probabilité q .
 - (a) Décrire l'ensemble Ω et construire une probabilité sur Ω .
 - (b) Quelle est la probabilité que k cibles au moins soient épargnées?

Exercice 5. Une urne contient des boules numérotées de 1 à 20. On tire sans remise trois boules de l'urne.

1. Décrire l'ensemble Ω et construire une probabilité du Ω .
2. Quelle est la probabilité qu'au moins une boule ait un numéro supérieur à 17?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros en ordre croissant?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros successifs en ordre croissant?

Exercice 6. * On tire n fois une pièce truquée qui tombe sur face avec probabilité p . On cherche à calculer la probabilité de l'événement A : « obtenir un nombre pair de fois face ».

1. Exprimer $\frac{1}{2}((x+y)^n + (y-x)^n)$ à l'aide du binôme de Newton.
2. En déduire une expression de $\mathbb{P}(A)$. Que se passe-t-il quand p est très proche de 1?

Exercice 7. Une urne contient b boules bleues et r boules rouges. On procède à n tirages successifs avec remise.

1. Quelle est la probabilité de tirer exactement k fois une boule bleue?
2. Quelle est la probabilité de tirer au plus k boules rouges?