Probabilités discrètes et statistiques descriptives

L2 Université Lyon 1 2018-2019

TD 3 : Statistiques descriptives et dénombrabilité

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un échantillon. Notons m_n sa moyenne empirique. Calculer la somme :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_n).$$

On définit la variance empirique ainsi :

$$\sigma_n(x)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_n)^2.$$

Développer le carré et déduire du premier calcul une autre expression de la variance empirique.

Exercice 2. Calculer la moyenne, l'écart-type et la médiane des séries statistiques suivantes :
1) $x = (0, 4, 6, 10)$;
2) $y = (0, 4, 6, 10, 100)$.

Exercice 3. On prélève $n = 30$ échantillons de pluies provenant du sud de la Pologne. On mesure le pH de ces échantillons et on note cette série statistique $(y_i)_{1\leq i\leq 30}$:

4.60,	4.79,	4.81,	4.82,	4.86,	4.89,	5.03,	5.06,	5.10,	5.14
5.17,	5.18,	5.28,	5.28,	5.32,	5.44,	5.45,	5.55,	5.62,	5.63
5.64,	5.70,	5.77,	5.79,	5.81,	5.82,	5.83,	5.85,	5.97,	6.32

a) Faire un histogramme de ces données. On choisira un nombre de classes égal à l'entier supérieur à $1 + \log(n)/\log(2)$.

b) Calculer la médiane et les quartiles.

c) Tracer le boxplot.

Exercice 4. Un atelier réalise le séchage de boues d'origine industrielle. Il obtient à la fin du processus des déchets. On a observé les poids suivants de déchets après le traitement de 100 kg de boues :

4,7	4,3	4,5	4,9	4,2	4,7	4,0	4,2	5,0	3,9	4,6	4,6
4,8	4,4	4,2	4,6	4,3	4,9	4,0	4,5	4,1	4,4	4,3	4,3

Notons x cette série statistique.

a) Opérer le dénombrement des différentes modalités du caractère et construire le tableau des effectifs, fréquences, fréquences cumulées.

b) Tracer un histogramme.

c) Tracer la fonction de répartition empirique.

d) Déterminer la médiane et les quartiles. Tracer le boxplot.

Exercice 5. On lance 100 fois un dé et on note les résultats :

face	1	2	3	4	5	6
nombre d'occurrences	13	16	18	16	13	24

a) Tracer la fonction de répartition empirique et le diagramme en bâtons (en tuyaux d'orgue). On pourra tracer aussi le diagramme en bâtons du modèle théorique.

b) Calculer le résumé numérique.

Exercice 6. Dénombrabilité

1. Comptine : 0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, etc. Formaliser pour établir une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.
2. (a) Soit n un entier naturel non nul. Démontrer qu'il existe un unique couple d'entiers naturels (a, b) tel que $n = 2^a(2b+1)$.
   (b) En déduire une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^2$. Autrement dit, $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
3. (a) Soit A l'ensemble des couples (s,t) d'entiers naturels tels que $t \leq s$. Dessiner A.
   (b) Montrer que l'application suivante est une bijection et expliciter la bijection réciproque :
   $$g : \mathbb{N}^2 \longrightarrow A, \quad (m,n) \longmapsto (m+n, n).$$
   (c) Pour s entier, on note $u_s = s(s+1)/2$. Calculer $u_{s+1} - u_s$. Montrer que la suite $(u_s)_{s\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et en déduire que pour tout entier N, il existe un unique s tel que $u_s \leq N < u_{s+1}$.
   (d) Montrer enfin que l'application suivante est une bijection et décrire sa réciproque :
   $$h : A \longrightarrow \mathbb{N}, \quad (s,t) \longmapsto \frac{s(s+1)}{2} + t.$$
   (e) Calculer $h \circ g(m,n)$ pour m et n inférieurs à 4. *On écrira le résultat dans un tableau.*
4. Démontrer (à nouveau) que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
5. Soit $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ et soit $p : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Montrer que $F = \{x \in \mathbb{N} : \ x \notin p(x)\}$ n'a pas d'antécédent. *Commencer avec* $\{1,2,3\}$ *à la place de* $\mathbb{N}$.

Exercice 7. Bibliothèques de Babel

Extrait de « La bibliothèque de Babel » *in* Jorge Luis Borges, *Fictions* (1941).

> Chacun des murs de chaque hexagone[1] porte cinq étagères ; chaque étagère comprend trente-deux livres, tous de même format ; chaque livre a quatre cent dix pages ; chaque page, quarante lignes, et chaque ligne, environ quatre-vingts caractères noirs. Il y a aussi des lettres sur le dos de chaque livre ; ces lettres n'indiquent ni ne préfigurent ce que diront les pages. [...]
> Un bibliothécaire de génie [...] observa que tous les livres, quelque divers qu'ils soient, comportent des éléments égaux : l'espace, le point, la virgule, les vingt-deux lettres de l'alphabet. Il fit également état d'un fait que tous les voyageurs ont confirmé : *il n'y a pas, dans la vaste Bibliothèque, deux livres identiques.* De ces prémisses incontroversables, il déduisit que la Bibliothèque est totale, et que ses étagères consignent toutes les combinaisons possibles des vingt et quelques symboles orthographiques (nombre, quoique très vaste, non infini), c'est-à-dire tout ce qu'il est possible d'exprimer dans toutes les langues.

1. Estimer le nombre de livres dans cette bibliothèque.
2. Combien y a-t-il de livres dans la super-bibliothèque de Babel, qui contient tous les livres comportant un nombre fini de pages et, sur chacune, un nombre fini de caractères.
3. Même question si les livres peuvent utiliser un nombre infini (dénombrable) de lettres pour tenir compte des différents alphabets passés, présents et futurs.
4. Combien y a-t-il de livres dans l'hyper-bibliothèque de Babel, qui contient tous les livres ayant un nombre fini ou infini (dénombrable) de pages ?

Exercice 8.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive. Démontrer que la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite double réelle positive, (une application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}^+$). Démontrer que la famille $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable si et seulement si les séries $\sum_{n\geq 0} v_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_{-n}$ sont convergentes.

Exercice 9. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(i+j+1)^3}.$$

1. On apprend au début de la nouvelle que les pièces de la bibliothèque sont hexagonales.