TD Feuille 4

Exercice 1. Loi d'un couple de variables aléatoires, table de contingence

Soit (X ; Y) un couple de v.a. discrètes à valeurs dans $\{1; 2; 3\} \times \{1; 2; 3; 4\}$ dont la loi de probabilité est indiquée dans le tableau ci-dessous :

X/Y	1	2	3	4
1	0,08	0,04	0,16	0,12
2	0,04	0,02	0,08	0,06
3	0,08	0,04	0,16	0,12

1. Déterminer les lois marginales de X et Y .
2. Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi de $min(X; Y)$.

Exercice 2.

Soit (X ; Y) un couple de v.a. discrètes à valeur $\{1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$ dont la loi de probabilité est indiquée dans le tableau ci-dessous, a et b étant des paramètres réels :

X/Y	0	1	2
1	a	1/6	1/12
2	b	1/3	1/6

1. Déterminer a et b pour que ce tableau soit celui d'une loi.
2. Pour quelles valeurs de a et b ces v.a. sont-elles indépendantes ?
3. Donner les lois de X et de Y.

Exercice 3. Evénements indépendants deux à deux

On lance deux pièces équilibrées de manière indépendante. On considère les événements A :"la première pièce donne face", B :"la deuxième pièce donne face" et C :"les deux pièces donnent le même résultat". Montrer que les événements A, B et C sont indépendants deux à deux mais pas mutuellement indépendants.

Exercice 4. Indépendance improbable

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble E dénombrable, et soit $f : E \to F$ une application. A quelle condition sur f les variables aléatoires X et $f(X)$ sont-elle indépendantes ?

Exercice 5. Indépendance et espérance

1. Montrer que deux variables de Bernoulli X et Y sont indépendantes si et seulement si $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
2. Trouver deux variables aléatoires X et Y non indépendantes mais vérifiant $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 6. Sorcellerie

M. Dursley sait qu'il y a environ une chance sur dix-neuf millions de gagner le jackpot au loto. Par ailleurs, il croît en l'existence de sorciers capable de prédire les chiffres du loto à l'avance sans se tromper et incapables de résister à l'envie d'utiliser ce pouvoir ; il estime que sa voisine, Mme Potter, a une chance sur mille d'être une sorcière.

Mme Potter viens de gagner le jackpot. En prenant en compte cette nouvelle information, à combien Dursley estime-t-il la probabilité que Mme Potter soit une sorcière ?

Exercice 7. Soit Ω un ensemble fini et notons V l'espace vectoriel réel des fonctions bornées de Ω dans $\mathbb{R}$. Soit $E : V \to \mathbb{R}$ une forme linéaire sur L vérifiant les propriétés suivantes :

(i) pour toute fonction bornée et positive f, on a $E(f) > 0$

(ii) $E(\mathbb{1}_\Omega) = 1$ où $\mathbb{1}_\Omega$ est la fonction constante égale à 1.

Montrer qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans Ω telle que $E(f) = \mathbb{E}\big(f(X)\big)$ pour tout $f \in V$.

Exercice 8. Formule de Poincaré

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé (fini) et soient $A_1, \cdots, A_n \subset \Omega$ des événements.

1. On note $\mathbb{1}_A$ la fonction indicatrice de A. Montrer que $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$ et que $\mathbb{1}_{A^c} = \mathbb{1}_\Omega - \mathbb{1}_A$.
2. Montrer que $\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$
3. En déduire que
$$\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1 < i_2 \cdots, < i_k \leqslant n} \mathbb{1}_{\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}}$$
4. Démontrer la formule d'inclusion-exclusion de Poincaré :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) &= \sum_{1\leq i\leq n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}(\cap_{i=1}^n A_i) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n} (-1)^{k+1}\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})\,.\end{aligned}$$