

TD Feuille 5

**Exercice 1.** Calculer l'espérance et la variance des lois usuelles ci-dessous.

	notation	ensemble de réalisations	$P[X = k]$	espérance	variance
loi binomiale	$\mathcal{B}(n, p)$	$k \in \llbracket 0, n \rrbracket$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$np$	$np(1-p)$
loi géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$k \in \mathbb{N}^*$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
loi de Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$k \in \mathbb{N}$	$\exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!}$	$\lambda$	$\lambda$
loi uniforme	$\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$	$k \in \llbracket 1, n \rrbracket$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$

**Exercice 2.** Soit  $\lambda > 0$  et pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , soit  $X_n$  une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres  $n$  et  $\lambda/n$ . Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Indication. On pourra démontrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \lambda/n)^n = e^{-\lambda}$ .

**Exercice 3.** La compagnie « La guêpe » assure 1000 navires. Un navire a une valeur de 10 millions d'euros. La probabilité de perte d'un navire est estimée à 0,001 pour une année. Les risques de perte des navires sont indépendants.

- On appelle  $X$  la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de navires perdus en une année parmi les navires assurés par « La guêpe ». Quelle est la loi de probabilité de  $X$  ?
- Quelle est la probabilité qu'il y ait 3 navires perdus en une année ?
- À la fin de l'année, la compagnie « La guêpe » règle les sinistres de l'année. À combien doivent s'élever ses réserves pour qu'elle puisse honorer ses engagements avec une probabilité de 0,999 ?

**Exercice 4.** Un boulanger réalise 100 petits pains aux pépites de chocolat. Il met 800 pépites dans sa pâte. Quelle est la loi du nombre  $X$  de pépites qui se trouve dans le pain que vous achetez ? Combien de pépites pouvez-vous espérer avoir (en moyenne) ? Calculer  $P[5 \leq X \leq 8]$ .

**Exercice 5.** Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire 2 boules simultanément. Soit  $X$  la v.a. égale à la somme des 2 numéros indiqués sur la boule. Donner la loi de  $X$  et calculer son espérance. Déterminer  $F$  sa fonction de répartition et calculer  $P(X \in ]3, 5])$ ,  $F(5)$ ,  $F(5-)$ .

**Exercice 6.** Soit  $X$  une v.a. dont la fonction de répartition est donnée par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0; \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in [0, 1[; \\ \frac{5}{6} & \text{si } x \in [1, 2[; \\ 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Calculer  $P(X < 1)$ ,  $P(X = 1)$ ,  $P(X = \frac{3}{2})$ ,  $P(X \in ]0, 2])$ .

**Exercice 7.** On lance un dé ordinaire non pipé jusqu'à obtenir 6. On note  $T$  le nombre de lancers.

- Quelle est la loi de  $T$  ? Quelle est son espérance ? Calculer la fonction de répartition de  $T$ . En déduire  $P[2 < T < 8]$ .
- Calculer  $P[T > 3]$  et  $P[T > 6 \mid T > 3]$ . Généraliser.
- Quel est le nombre minimal de lancers à effectuer pour que la probabilité d'obtenir au moins un 6 soit supérieure à  $1/2$  ?