Probabilités discrètes et statistiques descriptives **L2 Université Lyon 1 2018-2019**

TD Feuille 5

Exercice 1. Calculer l'espérance et la variance des lois usuelles ci-dessous.

	notation	ens. de réal.	$P[X=k]$	espérance	variance
loi binomiale	$\mathcal{B}(n,p)$	$k \in [\![0,n]\!]$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
loi géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$k \in \mathbb{N}^*$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
loi de Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$k \in \mathbb{N}$	$\exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ
loi uniforme	$\mathcal{U}([\![1,n]\!])$	$k \in [\![1,n]\!]$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$

Exercice 2. Soit $\lambda > 0$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, soit X_n une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et λ/n. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Indication : On pourra démontrer que $\lim_{n\to\infty}(1-\lambda/n)^n = e^{-\lambda}$.

Exercice 3. La compagnie « La guêpe »assure 1000 navires. Un navire a une valeur de 10 millions d'euros. La probabilité de perte d'un navire est estimée à 0.001 pour une année. Les risques de perte des navires sont indépendants.
a) On appelle X la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de navires perdus en une année parmi les navires assurés par « La guêpe ». Quelle est la loi de probabilité de X ?
b) Quelle est la probabilité qu'il y ait 3 navires perdus en une année ?
c) À la fin de l'année, la compagnie « La guêpe »règle les sinistres de l'année. À combien doivent s'élever ses réserves pour qu'elle puisse honorer ses engagements avec une probabilité de 0.999 ?

Exercice 4. Un boulanger réalise 100 petits pains aux pépites de chocolat. Il met dans sa pâte 800 pépites. Quelle est la loi du nombre X de pépites qui se trouve dans le pain que vous achetez ? Combien de pépites pouvez-vous espérer avoir (en moyenne) ? Calculer $P[5 \leq X \leq 8]$.

Exercice 5. Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire 2 boules simultanément. Soit la variable aléatoire X égale à la somme des 2 numéros indiqués sur la boule. Donner la loi de X et calculer son espérance. Déterminer F sa fonction de répartition et calculer : $P(X \in]3,5])$, $F(5)$, $F(5-)$.

Exercice 6. Soit X une v.a. dont la fonction de répartition est donnée par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0; \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in [0,1[; \\ \frac{5}{6} & \text{si } x \in [1,2[; \\ 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Calculer $P(X<1)$, $P(X=1)$, $P(X=\frac{3}{2})$, $P(X \in]0,2])$.

Exercice 7. On lance un dé jusqu'à obtenir 6. On note T le nombre de lancers.
1) Quelle est la loi de T ? Quelle est son espérance ? Calculer la fonction de répartition de T. En déduire $P[2 < T < 8]$.
2) Calculer $P[T > 3]$, $P[T > 6 \mid T > 3]$. Généraliser.
3) Quel est le nombre minimal de lancers à effectuer pour que la probabilité d'obtenir au moins un 6 soit supérieure à 0.5 ?