TD Feuille 6

Exercice 1. Fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. La fonction génératrice de X est la fonction d'un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\, t^n\,.$$

1. Montrer les propriétés du cour suivantes :
   (a) Le rayon de convergence de G est supérieur à 1. On a $G_X(1) = 1$ et si $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$ alors $G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$.
   (b) Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes à valeur dans des sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$ alors G_{X+Y} est égale à $G_X G_Y$ sur son ensemble de définition.
2. Calculer les fonctions génératrices des variables aléatoires suivantes :
   (a) Variable de Bernoulli de paramètre p.
   (b) Variable binomiale de paramètres n, p.
   (c) Variable de Poisson de paramètre λ.
   (d) Variable géométrique de paramètre p.
3. Montrer que si X_n est une variable binomiale de paramètres $n, p_n = \lambda/n$ alors

$$\lim_{n\to\infty} G_{X_n}(t) = G_X(t).$$

   où X est une variable de Poisson de paramètre λ.

Exercice 2. Minimum de deux variables aléatoires

Pour toute variable aléatoire X à valeur dans un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$, on note $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t)$ (définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.) Cette fonction s'appelle la fonction de répartition de X.

1. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $E \subset \mathbb{R}$. Soient $Z = \max(X, Y)$ et $W = \min(X, Y)$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F_Z(t) = F_X(t)F_Y(t)$$
$$F_W(t) = F_X(t) + F_Y(t) - F_X(t)F_Y(t)$$

2. Calculer la fonction de répartition d'une variable de loi géométrique, et trouver la loi du minimum et du maximum de deux variables aléatoires de loi géométriques de paramètres p et q.
3. Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme dans $\{0, ..., d\}$. Calculer la loi de $Y = \max\{X_i \,|\, i = 1, ..., n\}$.

Exercice 3. Soient $a, b, c \geq 0$. On pose

$$G(t) = \frac{at}{1-bt} + c\,.$$

Pour quels choix de a, b, c la fonction G est-elle une fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$?

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire ; on suppose que sa fonction génératrice vaut

$$G_X(t) = k(2+3t)^3$$

où k est un réel positif.

1. Calculer k.
2. Déterminer la loi de X.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.