Probabilités discrètes et statistiques descriptives

L2 Université Lyon 1 2018-2019

TD Feuille 6

Exercice 1. On lance deux dés : un rouge et un vert. Notons X le résultat du dé rouge et Y celui du dé vert. Calculer la loi de la v.a. $Z = X + Y$. Est-ce que X et Z sont indépendantes ?

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes dont la loi de probabilité conjointe est donnée par le tableau suivant.

$X\backslash Y$	0	1	2
0	16/81	16/81	4/81
1	16/81	???	4/81
2	4/81	16/81	1/81

1. Calculer la probabilité de l'événement $(X, Y) = (1, 1)$.
2. Calculer les lois marginales de X et de Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer la loi de probabilité, l'espérance et la variance de $Z = X + Y$.

Exercice 3. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et soient X et Y des variables aléatoires indépendantes et uniformes à valeurs dans $\{1, 2, \ldots, N\}$. Soit enfin $Z = \max(X, Y)$.

1. Trouver la fonction de répartition F_X de X.
2. Montrer que $F_Z = F_X F_Y$.
3. En déduire la loi de Z.

Exercice 4. Soient X et Y des variables indépendantes. On suppose que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p et que Y suit la loi de Poisson de paramètre λ. On pose $Z = XY$.

1. Calculer $\mathbb{P}(Z = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Calculer l'espérance et la variance de Z à l'aide de sa fonction génératrice.

Exercice 5. Soient X et Y deux v.a. indépendantes de loi de Poisson de paramètre respectifs λ et μ. On pose : $Z = X + Y$. Utiliser la formule des probabilités totales pour déterminer la loi de Z.

Exercice 6. On cherche à modéliser le nombre de poussins survivants parmi la ponte d'un jour dans un poulailler de la Bresse. On considère les v.a. X et Y représentant respectivement le nombre de poussins survivants et le nombre d'œufs pondus. La v.a. Y suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ et les œufs pondus donnent indépendamment les uns des autres un poussin vivant avec une probabilité $p \in]0, 1[$. Quelle est la loi de X ?

Exercice 7.

1. Soit $p \in [0, 1]$. Soit Y une v.a. suivant la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. Calculer l'espérance et la variance de Y.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une v.a. de loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$. Écrire X comme somme de n v.a. de Bernoulli et en déduire l'espérance et la variance de X.
3. Calculer la fonction génératrice de Y, puis celle de X.
4. Retrouver les espérances et variances calculées ci-dessus en utilisant les fonctions génératrices.

Exercice 8. Soit $p \in \,]0,1[$. Calculer la fonction génératrice de la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$. En déduire l'espérance et la variance d'une v.a. qui suit cette loi.

Exercice 9. Calculer la fonction génératrice de la loi de Poisson. Retrouver la loi de la somme de deux v.a. indépendantes de loi de Poisson.

Exercice 10. Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On prend dans cette urne une boule au hasard, on la remet et on ajoute une boule de la même couleur.

1. Quelle est la loi du nombre de boules blanches à l'issue de cette opération ?
2. On répète ce petit jeu plusieurs fois. Notons B_n le nombre de boules blanches et N_n le nombre de boules noires présentes dans l'urne après n répétitions. Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k = 1, \ldots, n+1$,
$$\mathbb{P}(B_n = k) = \frac{1}{n+1}$$
(justifier soigneusement les calculs). De quelle loi s'agit-il ? Donner son espérance et sa variance.