Probabilités discrètes et Statistiques descriptives **L2 Université Lyon 1 2018**

TD Feuille 7

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire à valeurs entières dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(X = k) = a\binom{n+k}{k}p^k \text{ (avec } a > 0,\ p \in]0;1[)$$

Calculer espérance et variance de X.

Exercice 2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, X et Y des variables aléatoires indépendantes et uniformes à valeurs dans $\{1, 2, ..., N\}$, et $Z := max(X, Y)$.

1. Trouver la fonction de répartition de X
2. Montrer que $F_Z = F_X F_Y$
3. En déduire la loi de Z

Exercice 3.

Soient X et Y des variables indépendantes où X suit la loi de Bernoulli de paramètre p et Y suit la loi de Poisson de paramètre λ. On pose $Z = XY$.

1. Calculer $\mathbb{P}(Z = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$
2. Calculer l'espérance et la variance de Z à l'aide de sa fonction génératrice.

Exercice 4. On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité p de réussir et $q = 1 - p$ d'échouer définissant une suite de variables de Bernoulli indépendantes $(X_n)_{n\geq 1}$.
Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note S_m la variable aléatoire déterminant le nombre d'essais jusqu'à l'obtention de m succès :

$$S_m = k \iff X_1 + \cdots + X_k = m \text{ et } X_1 + \cdots + X_{k-1} < m$$

1. Déterminer la loi et la fonction génératrice de S_1.
2. Même question avec $S_m - S_{m-1}$ pour $m \geq 2$.
3. Déterminer la fonction génératrice de S_m puis la loi de S_m

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle (paramètre λ).

1. Rappeler la densité de X.
2. Calculer son espérance et sa variance.
3. Soit a et b des réels positifs. Montrer que $\mathbb{P}(X > a + b \,|\, X > a) = \mathbb{P}(X > b)$