Probabilités discrètes et Statistiques descriptives

L2 Université Lyon 1 2018

TD Feuille 8

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, de densité f. On suppose que pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{P}(X > a + b | X > b) = \mathbb{P}(X > a)$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $\mathbb{P}(X > n) = \mathbb{P}(X > 1)^n$
2. Montrer que pour tout rationnel $q \geq 0$, $\mathbb{P}(X > q) = \mathbb{P}(X > 1)^q$
3. Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, $\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(X > 1)^x$
4. Reconnaître la loi de X. Calculer sa médiane en fonction de son espérance.

Exercice 2. Dans une station service, la demande en essence hebdomadaire (en litre) est une variable aléatoire X de densité :

$$f : x \longrightarrow \begin{cases} c(1-x)^4 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer c.
2. On suppose que l'essence est livrée chaque Mardi à 11h15. Quelle doit être la capacité du réservoir de la station essence pour que la probabilité qu'il n'y en ai pas assez pour la semaine soit inférieur à 10^{-5}.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Quelle est la loi de $T := -\frac{1}{\lambda} \log(1 - X)$?

Exercice 4. Un chargé de TD choisi deux nombres réels différents dans sa tête. Il écrit les deux nombres sur des papiers, et ses élèves doivent choisir un des papiers avec un nombre noté et deviner si il s'agit du plus grand des deux. Décrire une méthode qui permet aux élèves de gagner avec probabilité $> \frac{1}{2}$ quels que soient les nombres choisis (on suppose qu'ils ont accès à un générateur parfait de nombres aléatoires).

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire continue. On suppose que F_X, sa fonction de répartition, est bijective. Soit U est une variable uniforme sur $[0, 1]$. Quelle est la loi de $F_X^{-1}(U)$?

Exercice 6. En raison de grève des TCLs, un groupe de colle et son colleur arrivent devant la salle aléatoirement entre 17h et 18h. On suppose que l'heure d'arrivée des élèves est donnée par un choix uniforme d'un des bus, qui les font arriver à 17h, 17h30, 17h45 ou 18H (ils prennent tous le même bus). Le colleur lui prend la voiture, et son heure d'arrivée est donnée par une variable aléatoire continue de loi uniforme sur [17h,18h]. Les élèves sont près à attendre le colleur un quart d'heure avant de partir, le colleur, lui, les attendra jusqu'à une demie heure. Quelle est la probabilité que la colle se déroule normalement ?