TP 3 : Simulation avec R

1 Un premier exemple : loi binomiale et loi normale

1. Simuler $N = 100$ réalisations de la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, 0.5)$ (on pourra utiliser la fonction `rbinom`). Tracer le diagramme en bâton en utilisant la commande `plot(...,...,type='h')`.
2. Simuler $N = 100$ réalisations de la loi binomiale $\mathcal{B}(10, 0.5)$ Tracer le diagramme en bâton correspondant et représenter sur le même graphique les probabilités théoriques correspondantes (on pourra utiliser la fonction `points`).
3. Simuler $N = 10^6$ réalisations de la loi binomiale $\mathcal{B}(10, 0.5)$ Tracer l'histogramme de cet échantillon et représenter sur le même graphique la densité de la loi normale adéquate (on pourra utiliser la fonction `curve(dnorm(x,...,...),add=TRUE)`).
4. Simuler $N = 10^6$ réalisations de la loi binomiale $\mathcal{B}(100, 0.01)$ Tracer l'histogramme de cet échantillon et représenter sur le même graphique la densité de la loi normale adéquate.

2 Théorème central limite (suite)

Simuler 10 échantillons de la loi $\mathcal{U}([0, 3])$, notés $ech1$, $ech2$,...

Séparer la fenêtre graphique en plusieurs parties en utilisant `par(mfrow=c(2,3))`. Tracer les histogrammes de :

1. $ech1$,
2. $(ech1 + ech2)/2$,
3. $(ech1 + ech2 + ech3)/3$,
4. $(ech1 + ech2 + ech3 + ech4)/4$,
5. $(ech1 + ech2 + ech3 + ech4 + ech5)/5$,
6. $(ech1 + \cdots + ech10)/10$,

Ajouter sur chaque histogramme la loi normale adéquate.

Recommencer avec la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

3 Loi des grands nombres

Simuler un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_N)$ de variables i.i.d. de loi $\mathcal{B}(1, 0.5)$ pour N grand. Illustrer la loi des grands nombres en traçant $\overline{X}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots X_n}{n}$. en fonction de n (compris entre 1 et N). On pourra pour cela utiliser la fonction cumsum.

Procéder de même avec des échantillons de loi $\mathcal{N}(1, 4)$ et de Cauchy de paramètre 0 et 1. Que remarque-t-on ?

4 Théorème de Moivre-Laplace

Pour un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_N)$ de variables i.i.d. de loi $\mathcal{B}(1, p)$, on définit la variable aléatoire V_N par

$$V_N = \sqrt{N}\frac{\overline{X}_N - p}{\sqrt{p(1-p)}}$$

avec $\overline{X}_N = \frac{X_1+X_2+\cdots X_N}{N}$.

Illustrer le Théorème de Moivre-Laplace (Théorème centrale limite) en simulant k réalisations indépendantes de V_N (on pourra utiliser une boucle for), et en traçant dans le même graphique l'histogramme correspondant et la densité de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.