Probabilités discrètes et Statistiques descriptives-2017
Controle 1, le 10 mars 2017, durée : 1h15

1. Exercices

Rappel: Une variable aléatoire X suit la loi Bernoulli de paramètres $p \in [0,1]$ si X est à valeurs dans $\{0,1\}$ et $\mathbb{P}(X=1) = p = 1 - \mathbb{P}(X=0)$.

Une variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}_+^*$ et $p \in [0,1]$, si X est à valeurs dans $\{0,\ldots,n\}$ et

$$\mathbb{P}(Y=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \forall k = 1, \cdots, n.$$

Exercice 1.1. `Question de cours et applications des formules du cours (les questions sont indépendantes)`

(1) Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\{1,2,\cdots,K\}$ avec $K \in \mathbb{N}^*$. Donner la définition de l'indépendance entre X et Y dans ce cas.
(2) Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\{1,2,3\}$ telle que $\mathbb{P}(Z=1) = \mathbb{P}(Z=3) = 1/4$ et $\mathbb{P}(Z=2) = 1/2$. Calculer $\mathbb{E}[Z]$.
(3) Soient ξ et η deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que ξ suit la loi de Bernoulli de paramètre $1/3$ et que η suit la loi de Bernoulli de paramètre $2/7$. Calculer $\mathbb{P}(\xi + \eta = 2)$.

Exercice 1.2. Une urne contient des boules numérotées de 1 à 6. On tire 3 boules dans l'urne, sans remise.

(1) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 chiffres en ordre croissant?
(2) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 chiffres qui se suivent?

Exercice 1.3. Une urne contient 5 boules rouges et 4 boules noires. On tire, sans remise, trois boules dans cette urne.

(1) Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules de la même couleur?
(2) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge?

Exercice 1.4. Soient $\xi_1, \cdots, \xi_n$ des variables aléatoires indépendantes. On suppose qu'elles suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p où $p \in (0,1)$.

(1) Pour chaque entier $1 \le m \le n$, on pose $S_m = \xi_1 + \cdots + \xi_m$. Quelle est la loi de S_m (on ne demande pas de justification)?
(2) Soit N une variable aléatoire indépendante des variables aléatoires $\{\xi_i; 1 \le i \le n\}$. On suppose que N suit la loi binomiale de paramètre n et q, où $n \in \mathbb{N}_+$ et $q \in (0,1)$. On pose
$$S_N := \xi_1 + \cdots + \xi_N, \text{ si } N \ge 1;$$
et $S_N := 0$ si $N = 0$.
   (a) Montrer que
   $$\mathbb{P}(S_N = 0) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{S_k = 0\} \cap \{N = k\})$$
   (b) En déduire la valeur de $\mathbb{P}(S_N = 0)$.