L2 Université Lyon 1
2017

Probabilités discrètes et Statistiques descriptives
Examen final du 15 mai 2017, durée : 2h
(Sans document, ni calculatrice, 2 pages)

— On note toujours $\mathbb{E}(Z)$ l'espérance d'une variable aléatoire Z et $\mathrm{var}(Z)$ sa variance.

— On notera $\mathbb{1}_A$ la fonction indicatrice d'un ensemble A, c'est-à-dire que $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

— Rappel : une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et si

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

— Rappel : une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre $p \in \,]0,1]$ si X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

— Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On rappelle que la fonction génératrice de X est la fonction définie pour tout réel s tel que $|s| \leq 1$ par

$$G_X(s) = \mathbb{E}\left(s^X\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)s^n.$$

— On rappelle que la densité exponentielle de paramètre λ est donnée par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 1. Questions de cours et de compréhension du cours

1. Enoncer le théorème centrale limite pour une suite i.i.d. de variables aléatoires de Bernoulli (aussi appelé théorème de Moivre-Laplace).
2. Soit X une v.a. de loi géométrique de paramètre $p \in \,]0,1]$. Calculer la fonction génératrice de X. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X)$.
3. Soit X une v.a. de loi à densité exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Calculer $\mathbb{E}(e^{-\mu X})$ pour $\mu \geq 0$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier non nul.

1. En utilisant le binôme de Newton, montrer que pour tous réels x et y

$$\frac{1}{2}\big((x+y)^n + (y-x)^n\big) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} x^{2k} y^{n-2k}.$$

   où $\lfloor n/2 \rfloor$ est la partie entière de $n/2$.
2. Soit $p \in [0,1]$. On fait une série de n lancers d'une pièce biaisée ayant probabilité p de tomber sur face et $1-p$ sur pile. On note N le nombre de faces obtenus dans la série. Quelle est la loi de N ? (On pourra utiliser les résultats du cours sans démonstration).
3. Calculer la probabilité de tomber un nombre pair de fois sur face.

Exercice 3. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ un entier non nul. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1, ..., N\}$. (C'est-à-dire que $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{N}$ pour tout $k \in \{1, ..., N\}$.)

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
2. Calculer la variance de X. On pourra utiliser sans démonstration la formule suivante :

$$\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

Exercice 4. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ respectivement.

1. Calculer les fonctions génératrices $G_X(s)$ et $G_Y(s)$ des variables aléatoires X et Y.
2. En déduire la fonction génératrice $G_{X+Y}(s)$ de $X+Y$. Quelle est la loi de $X+Y$?
3. Calculer $\mathbb{P}(X+Y=n)$ pour tout entier n.
4. En déduire la valeur de la probabilité conditionnelle

$$\mathbb{P}(X = k \mid X+Y=n),$$

pour n un entier et k un entier tel que $0 \leq k \leq n$.

Exercice 5. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = 2x\mathbb{1}_{[0,1]}(x).$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité $f(x)$. Calculer la moyenne $\mathbb{E}(X)$, ainsi que la fonction de répartition $F_X(t)$ (Rappel : $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$).

Exercice 6. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire toutes les boules une par une sans remise et on note pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si le numéro de la } i\text{-ème boule tirée est inférieur ou égal à } i \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

On note

$$Y = X_1 + \ldots + X_n,$$

le nombre de boules dont le numéro est inférieur ou égal à l'ordre de tirage.

1. Calculer

$$\mathbb{P}(X_i = 1),$$

Quelle est la loi de X_i ?

2. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.
3. (*) Pour $i < j$, calculer

$$\mathbb{P}(X_j = 1 \mid X_i = 1).$$

En déduire $\mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1)$ puis $\mathbb{E}(X_i X_j)$.

4. (*) Pour $i < j$, est-ce que X_i et X_j sont indépendantes ?
5. (*) Exprimer $\mathrm{var}(Y)$ sous forme d'une somme.