Probabilités discrètes et statistiques descriptives

L2 Université Lyon 1 2019-2020

TD Feuille 4

Exercice 1

Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = 0{,}3$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 0{,}5$. Trouver $\mathbb{P}(B)$ quand :

(a) A et B sont indépendants ;

(b) A et B sont incompatibles ;

(c) $\mathbb{P}(A \mid B) = 0{,}1$;

(d) $\mathbb{P}(B \mid A) = 0{,}4$.

Exercice 2

Un nouveau vaccin a été testé sur 12 500 personnes ; 75 d'entre elles, dont 35 femmes enceintes, ont eu des réactions secondaires nécessitant une hospitalisation. Parmi les 12 500 personnes testées, 680 personnes sont des femmes enceintes.

1. Quelle est la probabilité pour une femme enceinte, d'avoir une réaction secondaire si elle reçoit un vaccin ?
2. Quelle est la probabilité pour une personne non enceinte d'avoir une réaction secondaire ?

Exercice 3

Pour se rendre à la Doua, une étudiante a le choix entre quatre itinéraires : A, B, C et D. La probabilité qu'elle choisisse A (respectivement B, C) est $1/3$ (respectivement $1/4$, $1/12$). La probabilité d'arriver en retard en empruntant le chemin A (respectivement B, C) est $1/20$ (resp. $1/10$, $1/5$). En empruntant le chemin D elle n'est jamais en retard.

1. Calculer la probabilité que l'étudiante arrive en retard.
2. Un jour donné, l'étudiante est en retard. Quelle est la probabilité qu'elle ait emprunté l'itinéraire C ?

Exercice 4

On me dit : « 20 % des tués lors d'un accident de la route, n'avaient pas attaché leur ceinture de sécurité. » Je réponds : « Il y a donc moins de risque à ne pas mettre sa ceinture. » Expliquez quels sont les pourcentages qu'il faudrait connaître pour raisonner plus proprement !

Exercice 5

(Exercice à résoudre à la maison.) Dans une jardinerie : 25 % des plantes ont moins d'un an, 60 % ont de 1 à 2 ans, 25 % ont des fleurs jaunes, 60 % ont des fleurs roses, 15 % ont des fleurs jaunes et moins d'un an, 3 % ont plus de 2 ans et n'ont ni fleurs jaunes, ni fleurs roses. 15 % de celles qui ont de 1 à 2 ans, ont des fleurs jaunes, 15 % de celles qui ont de 1 à 2 ans, n'ont ni fleurs jaunes ni fleurs roses. On suppose que les fleurs ne peuvent pas être à la fois jaunes et roses.

On choisit une plante au hasard dans cette jardinerie. Remplir le tableau suivant qui indique les probabilités de chaque catégorie de plante.

$\mathbb{P}[\,\cdot \cap \cdot\,]$	fleurs roses	fleurs jaunes	fleurs ni jaunes ni roses	total
moins de 1 an	.	15 %	.	25 %
entre 1 et 2 ans	.	.	.	.
plus de 2 ans	.	.	.	.
total	.	.	.	100 %

Exercice 6

Dans un jeu en réseau massivement multijoueur, trois joueurs lancent une attaque contre un même ennemi. On observe que cet ennemi tombe sous les tirs réussis de deux des trois joueurs exactement. On estime la valeur d'un joueur par sa probabilité d'atteindre la cible. Ces probabilités sont respectivement $1/4$, $1/2$ et $3/4$ pour ces joueurs. Traduire cet énoncé sous forme de données mathématiques (en particulier, il faut s'attacher à définir les événements considérés). Trouver pour chacun des joueurs la probabilité d'avoir raté leur attaque.

Exercice 7

Soient $M_1, M_2, \ldots, M_n$ des personnes qui se transmettent une information binaire (0 ou 1). La première personne, M_1, reçoit la bonne information. Elle la transmet à la deuxième personne M_2 et ainsi de suite jusqu'à M_n qui transmet finalement l'information. Malheureusement, à chaque fois que l'information est transmise, il y a une probabilité p que l'information soit changée en son contraire.

Pour $k \geq 1$, soient I_k l'événement « M_k a la bonne information » et $\overline{I_k}$ son complémentaire.

1. Modéliser cette expérience avec un arbre de probabilité.
2. En tenant compte du fait que deux changements rétablissent la vérité, quelle est la probabilité pour que M_3 ait le bon message ?
3. Quelle est la probabilité d'observer la suite des transmissions 010110 ?
4. On note p_i la probabilité pour que l'information initiale soit correctement transmise par M_i. Exprimer p_i en fonction de p_{i-1} (pour $i \geq 2$). En déduire p_n. Que se passe-t-il quand n tend vers l'infini ?

Exercice 8

On considère une infinité de lancers d'un dé (équilibré à six faces) et on veut déterminer la probabilité de ne jamais obtenir le nombre 1. Pour cela, on introduit pour chaque entier n les événements :

- B : « ne jamais obtenir de 1 » ;
- A_n : « ne pas obtenir de 1 au cours des n premiers lancers ».

1. Comment écrire B à l'aide des événements A_n $(n \geq 1)$?
2. Est-ce que la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante d'événements ?
3. Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer $\mathbb{P}(A_n)$ en fonction de n.
4. En déduire $\mathbb{P}(B)$. Que peut-on dire de l'événement B ?

Exercice 9

(Exercice supplémentaire.) Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On prend dans cette urne une boule au hasard, on la remet et on ajoute une boule de la même couleur.

1. Quelle est la loi du nombre de boules blanches à l'issue de cette opération ?
2. On répète ce petit jeu plusieurs fois. Notons B_n le nombre de boules blanches et N_n le nombre de boules noires présentes dans l'urne après $n-1$ répétitions. Montrer par récurrence sur n que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\mathbb{P}(B_n = k) = \frac{1}{n}$$

(justifier soigneusement les calculs). De quelle loi s'agit-il ?

Exercice 10

On lance deux pièces équilibrées de manière indépendante. On considère les événements A : « la première pièce donne face » ; B : « la deuxième pièce donne face » et C : « les deux pièces donnent le même résultat ». Montrer que les événements A, B et C sont indépendants deux à deux mais pas mutuellement indépendants.