Université Claude Bernard — Mathématiques
L3 Topologie et Théorie de la Mesure — 2023-2024

Feuille d'exercices numéro 1
Espaces normés, espaces métriques.

Exercice 1 Norme produit Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|')$ deux espaces vectoriels normés. Montrer que les applications $\|\cdot\|_1$,$\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définies pour (x,y) dans $E\times F$ par

$$\|(x,y)\|_1 = \|x\| + \|y\|' \quad ,$$

$$\|(x,y)\|_2 = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|'^2} \quad \text{et}$$

$$\|(x,y)\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|'\}$$

sont des normes sur $E\times F$. On appelle la norme $\|\cdot\|_\infty$ *norme produit.*

Vérifier que ces trois normes sont équivalentes.

Exercice 2 Pour tout élément $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes, on pose :

$$n_1(P) = \sum_{i=1}^{n} |a_i|, \quad n_\infty(P) = \max_{i=1\dots n} |a_i|$$

Comme dans l'exercice 1, on montre que n_1, n_∞ sont des normes.
1. Ces normes sont-elles équivalentes ?
2. Soit $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} X^k$. La suite (P_n) converge-t-elle pour une de ces normes ? Est-elle de Cauchy ?

Exercice 3

Soit $E = \ell^1(\mathbb{N}^*)$ l'ensemble des coefficients $P = (a_k)_{k\geq 1}$ de séries absolument convergentes donc telles que $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |a_i| < \infty$ et on note : $n_1(P) = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |a_i|$.

1. Montrer que n_1 est une norme sur E.
2. Soit $P_k^{(n)} = (\frac{1}{k^2} 1_{[\![1,n]\!]}(k))$ et $P^{(n)} = (P_k^{(n)}) \in E$. (Si on identifie $\mathbb{R}[X]$ comme les suites finies dans E. $P^{(n)}$ correspond à la suite de polynômes (P_n) de l'exercie 3). $(P^{(n)})$ converge t-elle dans E ?

Exercice 4 Soit $(E, ||.||)$ un evn. Montrer que tout $(x,y)\in E^2$ vérifie :

$$||x|| + ||y|| \leq ||x+y|| + ||x-y||.$$

Exercice 5 $(\star)$ On considère l'espace $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) = \{f\colon [0,1]\to\mathbb{R};\ f \text{ continue}\}$.

1. Pour $f\in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E.
2. Pour $f\in E$ et $r>0$, représenter graphiquement la boule ouverte $B(f,r)$.
3. Pour $f\in E$, on pose $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$. Justifier que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E.
4. Montrer que les deux normes précédentes ne sont pas équivalentes.

Exercice 6 Soit $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ avec

$$d_{\overline{\mathbb{R}}}(x,y) = \begin{cases} \min(1, |x-y|) & \text{si} \quad x, y \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{si} \quad x = y \in \{-\infty, +\infty\} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que $d_{\overline{\mathbb{R}}}$ est une distance.
2. Montrer que $d_{\overline{\mathbb{R}}}$ et la distance usuelle définie par $d_{\mathbb{R}}(x,y) = |x-y|$ ne sont pas équivalentes sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que les intervalles $]a,b[$ avec $a < b$ sont ouverts pour cette distance.
4. Montrer que $U \subset \mathbb{R}$ est ouvert pour la norme usuelle si et seulement si il est ouvert pour $d_{\overline{\mathbb{R}}}$

Ouverts, fermés.

Exercice 7

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $||.||_2$. Montrer que :

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0, y > 0\}$ est un ensemble ouvert.
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, y \geq 0\}$ est un ensemble fermé.

Exercice 8

1. Donner un exemple d'une intersection d'ouverts qui n'est pas un ouvert.
2. Donner un exemple d'une union de fermés qui n'est pas un fermé.

Exercice 9 $(\star)$ Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ continue}\}$.

1. Soit $A = \{f \in E : \forall x \in [0,1], f(x) > 0\}$. Montrer que A est ouvert dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et que A n'est pas ouvert dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
2. Soit $B = \{f \in E : \exists x \in [0,1], f(x) = 0\}$. Montrer que B est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 10

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) muni de la norme $||.||_2$. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont ouverts, lesquels sont fermés ? Calculer les intérieurs, adhérences, frontières.

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0, y \geq 0\}$.
2. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y > 0\}$.
3. $C = [0,1] \times]1,2[$,

Exercice 11

1. Calculer l'adhérence et l'intérieure de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.
2. Donner un exemple de partie A de $\mathbb{R}$ tel que les 7 ensembles :

$$A, \overline{A}, \mathrm{Int}(A), \mathrm{Int}(\overline{A}), \overline{\mathrm{Int}(A)}, \mathrm{Int}(\overline{\mathrm{Int}(A)}), \overline{\mathrm{Int}(\overline{A})}$$

   soient tous distincts
3. Que dire du rapport de $\mathrm{Int}(\overline{A})$, et $\mathrm{Int}(\overline{\mathrm{Int}(\overline{A})})$? De même, que dire du rapport de $\overline{\mathrm{Int}(A)}$ et $\overline{\mathrm{Int}(\overline{\mathrm{Int}(A)})}$?

Exercice 12
Soient $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé, A et B deux parties non vides de E. On suppose que A est ouvert. Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ et que cette inclusion peut ne pas être vrai si A n'est pas ouvert.

Exercice 13
Soient $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé, A et B deux parties denses dans E. On suppose que A est ouvert. Montrer que $A \cap B$ est dense dans E.

Exercice 14
Montrer que dans un espace vectoriel normé, un sous espace vectoriel propre n'est jamais ouvert.

Continuité uniforme

Exercice 15 Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16 Montrer que toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.

Exercice 17 Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, +\infty[$ mais pas lipschitzienne.

Exercice 18 Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, et telle qu'il existe M satisfaisant $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est lipschitzienne.

Exercice 19 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, X une partie de E et $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que la somme $f + g$ et le produit fg sont également des fonctions continues.

Exercice 20 Montrer que la composée de deux fonctions uniformément continues est uniformément continue.

Exercice 21 Montrer qu'une limite uniforme de fonctions uniformément continues est uniformément continue.

Exercice 22 Soit (X, d) un espace métrique. On désigne par E l'espace vectoriel formé par toutes les fonctions $f\colon X \to \mathbb{R}$ qui sont *bornées*, c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in X$.

Pour $f \in E$, on pose
$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|\colon x \in X\} \ .$$

1. Vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E.
2. Montrer que pour toute suite (f_n) d'éléments de E et $f \in E$, on a l'équivalence
$$((f_n) \text{ converge uniformément vers } f) \Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \to 0 \ .$$
3. Montrer que les fonctions continues appartenant à E forment un fermé de E. Que dire des fonctions uniformément continues appartenant à E ?

Exercice 23 Soit (X, d) un espace métrique. Soit A une partie non-vide et $d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$.

1. Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.

2. Montrer que $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipshitzienne.
3. Est-elle uniformément continue ?

Exercice 24 Soit E l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$. On considère l'application $\mu : E \to E$ définie par

$$\mu(f)(x) = \int_0^x f(t)dt \text{ pour } f \in E \text{ et } x \in [0,1].$$

1. Montrer que μ est bien définie et que μ est une application linéaire continue.
2. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$f_n(t) = n(1-t)^{n-1} \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } t \in [0,1].$$

   Pour chaque $n \geq 1$, calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\mu(f_n)\|_1$.
3. En déduire la norme de μ.

Exercices supplémentaires.

Exercice 25

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) muni de la norme $||.||_2$. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont ouverts, lesquels sont fermés ? Calculer les intérieurs, adhérences, frontières.

1. $D = \mathbb{Q}^2 \cap ([0,1] \times]1,2[)$,
2. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy < 1\}$,
3. $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1, x \neq 0\}$,
4. $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 1/n, y = 1/m, n > 0, m > 0\}$,
5. $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + z \geq 0\}$,
6. $I = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x > 0, y \geq 0, z \in]1,2[\cup \{-1/n, \ n \in \mathbb{N}\}\}$,
7. $J = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Q} \ : \ x > 0, y \geq 0\}$,

Exercice 26 Soit E un espace vectoriel et soient $||.||_1$ et $||.||_2$ deux normes sur E. On note $B_i(a,r)$ (resp. $B_{Fi}(a,r)$) la boule ouverte (resp. fermée) pour la norme $||.||_i$.

1. Montrer que : $B_{F1}(0,1) = B_{F2}(0,1) \iff (\forall x \in E, \ ||x||_1 = ||x||_2)$
2. Montrer que : $B_1(0,1) = B_2(0,1) \iff (\forall x \in E, \ ||x||_1 = ||x||_2)$

Exercice 27

Soit $X := \{(-1)^n + \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}^*\}$. L'ensemble X est-il un ouvert de $\mathbb{R}$? Déterminer $\overline{X}$.

Exercice 28

Soient $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé, $r > 0$ un nombre réel et $a \in E$. On suppose que A est ouvert. Montrer que l'adhérence de la boule ouverte $B(a,r)$ est la boule fermée $B_F(a,r)$ et l'intérieur de la boule fermée $B_F(a,r)$ est la boule ouverte $B(a,r)$.