Université Claude Bernard — Mathématiques
L3 Topologie et Théorie de la Mesure — 2023-2024

Feuille d'exercices numéro 2

Exercice 1 Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé. Étant donnée une famille non vide $(A_i)_{i\in I}$ de parties de E, comparer les ensembles $\bigcup_{i\in I} A_i$, $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$, $\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$, d'une part et $\bigcap_{i\in I} A_i$, $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i}$, $\bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$, d'autre part. Examiner le cas où I est fini.

Compacité

Exercice 2 Déterminer si les ensembles suivants sont, ou ne sont pas, compacts dans $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^4 = 1\} \ , \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y^2 = x^3\} \ ,$$

$$C = \{(\cos t, \sin t) \colon t \in [0, 1]\} \ , \quad D = \{(\cos t, \sin t) \colon t \in]0, 1]\} \ , \quad E = \{(\cos t, \sin t) \colon t \in]0, 2\pi]\}.$$

Exercice 3 On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme n_∞. Montrer que la boule fermée de centre 0 et rayon 1 n'est pas compacte. (Indication : on pourra démontrer que la suite (X^n) n'admet pas de sous-suite convergente.)

Exercice 4 Soit A une partie compacte d'un espace vectoriel normé. On suppose que A est contenue dans la boule unité ouverte $B(0, 1)$. Montrer qu'il existe $r < 1$ tel que A soit contenue dans $B_F(0, r)$.

Exercice 5 On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\| \cdot \|$ et on considère une partie non vide A de $\mathbb{R}^n$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ on définit

$$d(x, A) = \inf\{\|x - a\| \colon a \in A\} \ .$$

1. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x, A) \leq d(y, A) + \|y - x\|$
2. En déduire que $x \mapsto d(x, A)$ est une fonction continue.
3. Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que dans ce cas,

$$d(x, F) = 0 \text{ si et seulement si } x \in F.$$

4. Pour une partie non vide B de $\mathbb{R}^n$, on définit

$$d(A, B) = \inf\{\|b - a\| \colon a \in A, b \in B\} \ .$$

   Montrer que $d(A, B) = \inf\{d(a, B) \colon a \in A\}$.
5. Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $a \in K$ et $b \in F$ tels que

$$d(K, F) = \|b - a\|.$$

6. Ce dernier résultat est-il encore vrai si l'on suppose simplement K fermé ? (Indication : on pourra considérer les parties $A = \{(t, e^t) \colon t \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(t, -e^t) \colon t \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$.)

Exercice 6 Soit (X, d) un espace métrique, et (x_n) une suite d'éléments de X qui converge vers $x \in X$. Montrer que l'ensemble $\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est compact.

Complétude et Connexité.

Exercice 7 Soit $(E, ||\cdot||)$ un e.v.n., et $F \subseteq E$ un sous-espace de dimension finie. Montrer que F est fermé dans E.

Exercice 8 On considère l'espace $E = \ell^1(\mathbb{N}) = \{a = (a_i) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : ||a||_1 = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| < \infty\}$. On sait que $(E, ||\cdot||_1)$ est un espace vectoriel normé (cf TD 1 ex 3). Soit $a_n = (a_{n,m})_{m\geq 0} \in E$ la suite des coefficients d'une série absolument convergente dans E, c'est à dire : $\sum_{n=0}^{\infty} ||a_n||_1 < +\infty$.

On rappelle la version série du théorème de Fubini-Tonelli, pour toute série double (à coefficients positifs comme $|a_{n,m}|$), on peut intervertir les sommes :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} |a_{n,m}| = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n,m}| \in [0, +\infty].$$

1. Montrer que pour chaque $m \in \mathbb{N}$, la série $\sum_n a_{n,m}$ converge dans $\mathbb{K}$, disons vers $b_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m}$.
2. Montrer que $b = (b_m)_{m\geq 0} \in E$.
3. Montrer que $\left\|\sum_{i=0}^{n} a_i - b\right\|_1 \leq \sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} |a_{i,m}|$. En déduire que $\left\|\sum_{i=0}^{n} a_i - b\right\|_1 \to_{n\to\infty} 0$.
4. En déduire que E est complet.

Exercice 9 On considère l'espace $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R};\ f \text{ continue}\}$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$ (cf TD 1 ex 5)

1. Montrer que $f_n(x) = x^n$ définit une suite de Cauchy de E.
2. E est-il complet ?

Exercice 10
Lesquels parmi les sous-ensembles suivant de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ (munies de la norme euclidienne) sont connexes ?

$A = \{0,1,2\} \subset \mathbb{R}$, $B = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$, $C = B((0,0),1) \cup B((1,1),1) \subset \mathbb{R}^2$, $D = B((0,0),1) \cup B((2,2),1) \subset$

Exercice 11 Soit E un e.v.n. Un ensemble $A \subset E$ est dit *étoilé* si il existe $a_0 \in A$ tel que pour tout $a \in A$, l'intervalle $[a_0, a] = \{ta_0 + (1-t)a : t \in [0,1]\} \subset A$.

1. Montrer qu'un ensemble étoilé est connexe (par arc).
2. Montrer que $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ est connexe (par arc) mais n'est pas étoilé.

Exercices supplémentaires.

Exercice 12 **Points fixes** Soit (X, d) un espace métrique complet, et $f : X \to X$ une application telle que

$$\exists k < 1\ \forall x \neq y \in X \quad d(f(x), f(y)) \leq kd(x,y)\ .$$

Montrer que f est continue et admet un unique point fixe.

Exercice 13 Soit (X, d) un espace métrique, et (K_n) une suite de compacts non vides de X tels que $K_{n+1} \subseteq K_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $K = \bigcap_n K_n$.

1. Montrer que K est compact et non vide.
2. Soit U un ouvert tel que $K \subseteq U$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $K_i \subseteq U$ pour tout $i \geq n$.