Feuille d'exercices numéro 2
Correction partielle

Exercice 1 (cf TD.)

Compacité

Exercice 2
(cf TD.)

Exercice 3 (cf TD.)

Exercice 4 (cf TD.)

Exercice 5 On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\|\cdot\|$ et on considère une partie non vide A de $\mathbb{R}^n$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ on définit

$$d(x, A) = \inf\{\|x-a\|: a \in A\} .$$

1. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x,A) \leq d(y,A) + \|y-x\|$
2. En déduire que $x \mapsto d(x,A)$ est une fonction continue.
3. Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que dans ce cas,
$$d(x,F) = 0 \text{ si et seulement si } x \in F.$$
4. Pour une partie non vide B de $\mathbb{R}^n$, on définit
$$d(A,B) = \inf\{\|b-a\|: a \in A, b \in B\} .$$
Montrer que $d(A,B) = \inf\{d(a,B): a \in A\}$.
5. Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $a \in K$ et $b \in F$ tels que
$$d(K,F) = \|b-a\|.$$
6. Ce dernier résultat est-il encore vrai si l'on suppose simplement K fermé ? (Indication : on pourra considérer les parties $A = \{(t, e^t): t \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(t, -e^t): t \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$.)

Correction de 2021-2022 exercice 32
`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille2-matheco_2021-2022_correctionpartiellemas.pdf`

Exercice 6 (cf TD.)

Complétude et Connexité.

Exercice 7
(cf TD.)

Exercice 8 On considère l'espace $E = \ell^1(\mathbb{N}) = \{a = (a_i) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : ||a||_1 = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| < \infty\}$. On sait que $(E, ||\cdot||_1)$ est un espace vectoriel normé (cf TD 1 ex 3). Soit $a_n = (a_{n,m})_{m\geq 0} \in E$ la suite des coefficients d'une série absolument convergente dans E, c'est à dire : $\sum_{n=0}^{\infty} ||a_n||_1 < +\infty$.

On rappelle la version série du théorème de Fubini-Tonelli, pour toute série double (à coefficients positifs comme $|a_{n,m}|$), on peut intervertir les sommes :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} |a_{n,m}| = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n,m}| \in [0, +\infty].$$

1. Montrer que pour chaque $m \in \mathbb{N}$, la série $\sum_n a_{n,m}$ converge dans $\mathbb{K}$, disons vers $b_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m}$.
   Solution : Il suffit de voir que la série est absolument convergente (ce qui implique sa convergence vu $\mathbb{R}$ complet). Or
   $$\Big|\sum_n a_{n,m}\Big| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} |a_{n,m}| = \sum_{n=0}^{\infty} ||a_n||_1 < +\infty.$$
2. Montrer que $b = (b_m)_{m\geq 0} \in E$. *Solution* : Par l'inégalité triangulaire des séries :
   $$||b||_1 = \sum_{m=0}^{\infty} |b_m| \leq \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n,m}| = \sum_{n=0}^{\infty} ||a_n||_1 < +\infty.$$
3. Montrer que $\left\|\sum_{i=0}^{n} a_i - b\right\|_1 \leq \sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} |a_{i,m}|$. En déduire que $\left\|\sum_{i=0}^{n} a_i - b\right\|_1 \to_{n\to\infty} 0$.
   Solution : Par l'inégalité triangulaire des séries, puis l'interversion des sommes :
   $$||\sum_{i=0}^{n} a_i - b||_1 = \sum_{m=0}^{\infty} |\sum_{i=0}^{n} a_{i,m} - b_m| = \sum_{m=0}^{\infty} |\sum_{i=n+1}^{\infty} a_{i,m}| \leq \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=n+1}^{\infty} |a_{i,m}| = \sum_{i=n+1}^{\infty} ||a_i||_1.$$
   Comme reste d'une série convergente, la dernière somme tend vers 0, d'où le résultat.
4. En déduire que E est complet.
   Solution : Le 3 dit que les sommes partielles de la série des (a_n) converge vers $b \in E$, et comme la série absolument convergente était arbitraire, toute série absolument convergente converge. C'est le critère de complétude par série qui indique donc que E est complet.

Exercice 9 (cf TD.)

Exercice 10
(cf TD.)

Exercice 11 (cf TD.)

Exercices supplémentaires.

Exercice 12 Points fixes Soit (X, d) un espace métrique complet, et $f\colon X \to X$ une application telle que

$$\exists k < 1 \ \forall x \neq y \in X \quad d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)\ .$$

Montrer que f est continue et admet un unique point fixe.

Solution :

f est k-lipschitzienne donc (uniformément) continue par le cours.

Soit $x_0 \in X$ on définit par récurrence $x_n = f(x_{n-1}) = f^{\circ n}(x_0)$. Donc

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq kd(x_n, x_{n-1}) \leq k^n d(x_1, x_0). \tag{1}$$

Montrons que x_n **est bornée** en voyant par récurrence que $d(x_n, x_0) \leq \sum_{i=0}^{n-1} k^i d(x_1, x_0)$. C'est évident pour $n = 1$. Et par l'inégalité triangulaire et 1 :

$$d(x_{n+1}, x_0) \leq d(x_{n+1}, x_n) + d(x_n, x_0) \leq k^n d(x_1, x_0) + \sum_{i=0}^{n-1} k^i d(x_1, x_0) = \sum_{i=0}^{n} k^i d(x_1, x_0)$$

Or on reconnaît une série géométrique convergente, d'où la borne : $d(x_{n+1}, x_0) \leq \frac{1}{1-k} d(x_1, x_0)$.

Montrons que x_n **est de Cauchy.** En effet, pour $m > n$,

$$d(x_n, x_m) = d(f^{\circ n}(x_0), f^{\circ n}(x_{m-n}) \leq k^n d(x_0, x_{m-n}) \leq k^n \frac{1}{1-k} d(x_1, x_0)$$

Comme $k^n \frac{1}{1-k} \to 0$, on déduit que pour N grand et $m > n \geq N$ $d(x_n, x_m)$ est arbitrairement petit, donc x_n est de Cauchy. Par complétude de X, on obtient donc que x_n converge, disons vers x. Maintenant, en passant à la limite dans (1), on obtient $d(f(x), x) = \lim_n d(f(x_n), x_n) \leq \limsup_n d(f(x_n), x_n) \leq \limsup_n k^n d(x_1, x_0) = 0$ donc par séparation $f(x) = x$ et x est le point fixe cherché.

Exercice 13 Soit (X, d) un espace métrique, et (K_n) une suite de compacts non vides de X tels que $K_{n+1} \subseteq K_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $K = \bigcap_n K_n$.

1. Montrer que K est compact et non vide.

   Solution : Chaque K_n est fermé dans le compact K_1, donc $K = \bigcap_n K_n$ est fermé comme intersection de fermés. On déduit que K est un fermé du compact K_1, donc un compact.

   Comme chaque compact K_n est non vide, on choisit $x_n \in K_n$. Comme c'est une suite du compact K_1 elle admet une sous-suite convergente de limite x, disons $x_{\phi(n)} \in K_{\phi(n)} \subset K_n$ (car $\phi(n) \geq n$). Donc pour tout $n \geq N$, $x_{\phi(n)} \in K_N$ donc en passant à la limite $x \in K_N$ et ce pour tout n donc $x \in K$ qui est non-vide.

2. Soit U un ouvert tel que $K \subseteq U$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $K_i \subseteq U$ pour tout $i \geq n$.
   Solution : Par contraposée, sinon, $K_i \cap U^c \neq \emptyset$. Or U^c fermé, donc $K_i \cap U^c$ est un fermé du compact K_i, donc il est compact. $K_i \cap U^c$ est donc une suite de compact non-vide et par le 1, son intersection est non-vide. Mais par distributivité de l'intersection, c'est $K \cap U^c$ qui est donc non-vide et c'est la négation de $K \subseteq U$.