Université Claude Bernard | Mathématiques
L3 Topologie et Théorie de la Mesure | 2023-2024

Feuille d'exercices numéro 3

Ensembles et fonctions convexes

Exercice 1 Montrer que les ensembles C_i suivants sont convexes et trouver les cônes normaux $N_{C_i}(0)$ en $0 = (0,0)$:
1. $C_1 = [0,+\infty[\times \mathbb{R}$, 2. $C_2 = [0,+\infty[^2$, 3. $C_3 = [-1,1]^2$, 4. $C_4 = \{(x,y) \in [0,1]^2 : x \leq y\}$.

Exercice 2

1. Soient A, B deux convexes. Montrer que $A \cap B$ est convexe.
   Est-ce que $A \cup B$ est convexe ?
2. Soit $A = \{0\} \cup]0,+\infty[^2$. Montrer que A est convexe dans $\mathbb{R}^2$ et calculer $T_A(0)$
3. Soit $B =]-\infty, 0] \times \mathbb{R}$, calculer $T_B(0)$ et $T_{A\cap B}(0)$.
4. Soient A, B deux convexes généraux avec $c \in A \cap B$, trouver une relation entre $T_{A\cap B}(c)$ et $T_A(c) \cap T_B(c)$. (Pour une meilleure relation dans un cas particulier on pourra voir aussi l'exercice 20. 2)

Exercice 3 Montrer les inégalités suivantes, à l'aide de raisonnements de convexité :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x$.
2. $\forall x > 0,\ \ln(x) \leq x - 1$.
3. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.
4. $\forall x > -1,\ \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.

Exercice 4 Montrer que la fonction suivante croissante sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Exercice 5 Soit f la fonction définie par la formule $f(x) = x^{2k}$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.

1. En calculant la dérivée seconde, montrer que f est strictement convexe sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 Soient E, F des e.v. sur $\mathbb{R}$ et I un intervalle.

1. Soient $f : E \to I, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que f est convexe et g est convexe et croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.
2. Si $f : E \to \mathbb{R}$ est convexe et $A : F \to E$ linéaire, montrer que $f \circ A$ est convexe.
3. Montrer que $f(x,y) = (|2x+3y| + |x-y|)^p$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$ pour $p \in [1,+\infty[$.

Exercice 7

1. Prouver que la fonction f définie par $f(x,y) = xy$ n'est pas convexe sur $\mathbb{R}^2$, mais que les fonctions g, h définies par $g(x,y) = x^2 + y^2$ et $h(x,y) = x^2 + y^2 + xy$ le sont.
2. Montrer que les trois fonctions suivantes sont séparément convexes en x (pour chaque y) et en y (pour chaque x).

$$i(x,y) = exp(x+y), j(x,y) = exp(xy), k(x,y) = exp(x) + exp(y).$$

Lesquelles sont des fonctions convexes sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 8 Lesquels parmi les fonctions suivantes sont convexes sur $[-1,1]^2$:

$$h_1(x,y) = \frac{x^3+y^3}{6}, h_2(x,y) = \frac{x^4+y^4}{12},\ h_3(x,y) = x^2+y^2+\frac{x^3}{3},\ h_4(x,y) = x^4+y^4-4xy.$$

Exercice 9 Soit $f(x,y,z) = (2x+y)^2 + (2x+z)^2 - x^2$.

1. Montrer que les restrictions de f aux sous-espaces :

$$C_1 = \{(x,y,0), (x,y) \in \mathbb{R}^2\}, \quad C_2 = \{(x,0,z), (x,z) \in \mathbb{R}^2\}, \quad C_3 = \{(0,y,z), (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$$

sont convexes.

2. Est-ce que f est convexe sur $\mathbb{R}^3$?

Exercice 10 On s'intéresse au problème de minimiser la fonction f définie par :

$$f(x,y) = x^2 - 2x + y^4$$

sur le pavé $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1/2, 0 \leq y \leq 2\} = [0, \frac{1}{2}] \times [0,2]$.

1. Montrer que A est convexe.
2. Prouver que f est convexe sur A.
3. Montrer qu'il existe une solution unique du problème (Indication : rappeler pourquoi A est compact).
4. Trouver la solution.

Exercice 11 On s'intéresse au problème de minimiser la fonction

$$f(x,y) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^2y^3}{12} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + 4$$

sur le pavé $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.

1. Prouver que f est strictement convexe sur A.
2. Montrer qu'il existe une solution unique du problème.
3. Trouver la solution.

Exercice 12 Soit C un convexe et $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction, montrer que f est convexe sur C si et seulement si pour tout intervalle $[a,b] \subset C$, la restriction $f_{|[a,b]}$ est convexe.

Exercices plus difficiles

Exercice 13

1. Soit C une partie fermée dans E e.v.n. telle que si $x, y \in C$ alors $\frac{x+y}{2} \in C$. Prouver que C est convexe.
2. Soit C convexe fermé de E. Soit $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que
$$\forall x, y \in C \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$
Montrer que f est convexe.
3. Même question C est juste convexe mais pas fermé. (Indication : utiliser l'ex. 12)

Exercice 14

1. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{2x-\cos(x)}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f \colon I \to]0, +\infty[$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que si $\ln(f)$ est convexe alors f est convexe. Réciproque ?
3. Application : Montrer que $x \mapsto (1+x)^x$ est convexe sur $]-1, +\infty[$.

Exercice 15 Montrer que si $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe et tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ alors f est à valeurs positives (on pourra commencer par justifier le fait que f est décroissante).

Exercice 16 Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que si f est à valeurs négatives alors f est constante.
2. Montrer que s'il existe a, b tels que $f(x) \leq ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors f est une fonction affine.

Exercice 17 Soit $f \colon [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction concave. Montrer que pour tout $x, y \geq 0$ on a $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

Exercice 18 Soit f une fonction de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, majorée, de classe C^2. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que
$$\forall x \geq 0 \ f''(x) \geq af(x) \geq 0 \ .$$

1. Montrer que f est décroissante.
2. Déterminer la limite de $f'(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
4. Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a $f(x) \leq f(0)e^{-x\sqrt{a}}$.
(Indication : en posant $\varphi(x) = f(0)e^{-x\sqrt{a}}$ on pourra montrer que $g = \frac{f}{\varphi}$ est décroissante en écrivant $g'(x) = \frac{\omega(x)}{\varphi(x)^2}$ et étudiant les variations de ω pour trouver son signe.)

Exercice 19 Montrer que pour S une partie fermé non-vide de E e.v.n. alors la fonction distance $d_S(x) := d(x,S) = \inf_{s\in S} ||x-s||$ est convexe si et seulement si S est convexe.

Exercice 20 Soient $g_1, ..., g_n$ des fonctions convexes C^1 définies sur $\mathbb{R}^m$ tel qu'il existe x_0 avec $g_i(x_0) < 0$ pour tout i. Soit la contrainte :$A = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i \in \{1,...,n\}, g_i(x) \leq 0\}$. On rappelle que soit $x \in A$ avec $g_1(x) = ... = g_l(x) = 0$ (contraintes actives en x) et $g_{l+1}(x) < 0, ...g_n(x) < 0$, on a :

$$N_A(x) = \{\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \nabla g_i(x), \lambda_i \geq 0\}.$$

1. Soit $I \subset \{1,...,n\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i \in I, g_i(x) \leq 0\}$ et $C = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i \in \{1,...,n\} \setminus I, g_i(x) \leq 0\}$ et $x \in B \cap C$.
   En déduire que $N_{B\cap C}(x) = N_B(x) + N_C(x)$ et $T_{A\cap B}(c) = T_A(c) \cap T_B(c)$.
2. Si x minimise une fonction convexe f sur A. Montrer que x vérifie $\nabla f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla g_i(x) = 0$ pour $\lambda_i \geq 0$ (et $\lambda_i = 0$ si la i-ème contrainte n'est pas active)
3. On considère le problème de minimiser $f(x,y) := (x-3)^2 + (y-2)^2$ sous les contraintes $x^2 + y^2 \leq 5, -x + 2y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$.
   Prouver qu'une solution existe qui n'est pas $(0,0)$ et en déduire que la solution satisfait $f(x,y) < 13$.
   Trouver la solution (en se guidant graphiquement et en utilisant les conditions nécessaires). (Indication : Graphiquement, on se doute que la contrainte saturée au minimiseur va être $x^2 + y^2 = 5$)

Exercices d'entraînements

Exercice 21 Montrer que les C_i sont convexes et trouver les cônes normaux $N_{C_i}(a_j)$:

1. $C_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ en $a_1 = (0,0)$ et en $a_2 = (0,1)$.
2. $C_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-1| + |y| \leq 1\}$ en $a_1 = (0,0)$, en $a_3 = (1,0)$ et en $a_4 = (1/2, 1/2)$.

Exercice 22 On s'intéresse au problème de minimiser la fonction

$$f(x,y) = x^4 + x^2y^3 + 9x^2 + 8y^2 + 4$$

sur le pavé $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.

1. Prouver que f est strictement convexe sur A.
2. Montrer qu'il existe une solution unique du problème (Indication : rappeler pourquoi A est compact)
3. Trouver la solution.

Exercice 23 Lesquels parmi les fonctions suivantes sont convexes sur $\mathbb{R}^2$.

$$f_0(x,y) = x^2 + y^2 + x^4,\ f_1(x,y) = x^2 + y^2 + x^3,\ f_2(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy,\ f_3(x,y) = \cos(x+y),$$

$$f_4(x,y) = xe^y + ye^x,\ f_5(x,y) = |x+1| + |y|,\ f_6(x,y) = (|x+1| + |y|)^2.$$

Exercice 24 Lesquels parmi les fonctions suivantes sont convexes sur $[0,1]^2$:

$$g_1(x,y) = \frac{x^3+y^3}{6},\ g_2(x,y) = \frac{x^4+y^6}{12},\ g_3(x,y) = -\sqrt{2-(x^2+y^2)}$$

$$g_4(x,y) = \frac{x^2y^2}{2},\ g_5(x,y) = \cos(xy),\ g_6(x,y) = x^2+y^2+\frac{x^3}{6}.$$