Université Claude Bernard | Mathématiques
L3 Topologie et Théorie de la Mesure | 2023-2024

Feuille d'exercices numéro 3

Ensembles et fonctions convexes

Exercice 1
(cf TD.)

Exercice 2
(cf TD.)
ou Correction de 2021-2022 exercice 2
https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille7-matheco_2022-2023correction.pdf

Exercice 3
(cf TD.)
ou Correction de 2021-2022 exercice 3
https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille7-matheco_2022-2023correction.pdf

Exercice 4
Correction de 2021-2022 exercice 4
https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille7-matheco_2022-2023correction.pdf

Exercice 5 (cf TD)
ou Correction de 2021-2022 exercice 5
https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille7-matheco_2022-2023correction.pdf

Exercice 6 (cf TD.)
ou Correction de 2021-2022 exercice 6
https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille7-matheco_2022-2023correction.pdf

Exercice 7
(cf TD.)
ou Correction de 2021-2022 exercice 7
https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille7-matheco_2022-2023correction.pdf

Exercice 8
(cf TD.)
ou Correction de 2021-2022 exercice 8
https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille7-matheco_2022-2023correction.pdf

Exercice 9

(cf TD.)

ou Correction de 2021-2022 exercice 9

https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille7-matheco_2022-2023correction.pdf

Exercice 10

(cf TD.)

Attention, il manque la preuve de la stricte convexité à la Correction de 2021-2022 exercice 10

Exercice 11

(cf TD.)

ou Correction de 2021-2022 exercice 11

https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille7-matheco_2022-2023correction.pdf

Exercice 12 Soit C un convexe et $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction, montrer que f est convexe sur C si et seulement si pour tout intervalle $[a, b] \subset C$, la restriction $f_{|[a,b]}$ est convexe.

Solution : $\Rightarrow$ est assez évident car la restiction préserve la convexité (il y a moins de points à vérifier dans la condition pour tout).

$\Leftarrow$ C'est aussi proche de la définition. Soit $(a, b) \in C$, de $f_{|[a,b]}$ est convexe on déduit l'inégalité voulue pour $t \in [0, 1]$

$$f(ta + (1-t)b) = f_{|[a,b]}(ta + (1-t)b) \leq tf_{|[a,b]}(a) + (1-t)f_{|[a,b]}(b) = tf(a) + (1-t)f(b)$$

Exercices plus difficiles

Exercice 13

(cf TD.)

ou Correction de 2021-2022 exercice 14

https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille7-matheco_2022-2023correction.pdf

Exercice 14

1. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{2x-\cos(x)}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f \colon I \to]0, +\infty[$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que si $\ln(f)$ est convexe alors f est convexe. Réciproque ?
3. Application : Montrer que $x \mapsto (1 + x)^x$ est convexe sur $]-1, +\infty[$.

Exercice 15 Montrer que si $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe et tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ alors f est à valeurs positives (on pourra commencer par justifier le fait que f est décroissante).

Solution : On applique l'inégalité des pentes à $a < b < c$ puis on fait tendre $c \to \infty$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \to_{c\to\infty} (0 - f(b)).0 = 0$$

Vu que $b - a > 0$ on déduit $f(b) - f(a) \leq 0$ donc f décroissante $f(b) \leq f(a)$. En faisant maintenant tendre $b \to \infty$, on obtient finalement : $0 \leq f(a)$.

Exercice 16 Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que si f est à valeurs négatives alors f est constante.
2. Montrer que s'il existe a, b tels que $f(x) \leq ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors f est une fonction affine.

Exercice 17 Soit $f\colon [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction concave. Montrer que pour tout $x, y \geq 0$ on a $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.
(cf. TD)

Exercice 18 Soit f une fonction de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, majorée, de classe C^2. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\forall x \geq 0 \ f''(x) \geq af(x) \geq 0 \ . \tag{1}$$

1. Montrer que f est décroissante.
   Solution :
   Par (1), f est convexe. Pour une telle fonction, si $f'(a) > 0$ alors $f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a) \to_{x\to\infty} \infty$ donc f n'est pas majorée. Donc par contraposée, pour une fonction convexe, f majorée implique que $f'(x) \leq 0$ pour tout x et donc f décroissante.
2. Déterminer la limite de $f'(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
   Solution : On sait $f'(x) \leq 0$ par le 1, et comme f convexe, on a f' croissante, donc admet une limite $-\ell$ de f' en $+\infty$. En particulier, pour tout x, on a $f'(x) \leq -\ell$. Par l'absurde, si $-\ell < 0$, on pose $g(x) = f(x) + \ell x$, mais $g'(x) = f'(x) + \ell \leq 0$ et donc g décroissante. Or par (1) $g(x) = f(x) + \ell x \geq \ell x \to_{x\to\infty} \infty$, ce qui contredit g décroissante $g(0) \geq g(x) \to_{x\to\infty} \infty$. On en déduit donc que $\ell = 0$.
3. Montrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
   Solution : On a f décroissante positive, donc admet une limite $\ell \geq 0$ de f en $+\infty$. Par l'absurde, supposons $\ell > 0$, donc $f(x) \geq \ell$ pour tout x et (1), $f''(x) \geq a\ell > 0$. On en déduit, $f'(x) \geq a\ell x + b$ car la différence est croissante, puis en intégrant encore $f(x) \geq a\ell\frac{x^2}{2} + bx + c$ ce qui tend en $+\infty$ en $x \to +\infty$, contredisant f majorée.
4. Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a $f(x) \leq f(0)e^{-x\sqrt{a}}$.
   Solution : (C'est une question d'équation différentielle, sur la comparaison des solutions d'inéquations d'ordre 2).
   Comme f est décroissante positive, il n'y a rien à montrer si $f(0) = 0$ car $0 = f(x) \leq 0 = f(0) = f(0)e^{-x\sqrt{a}}$. On suppose donc $f(0) > 0$.
   Soit $\varphi(x) = f(0)e^{-x\sqrt{a}} > 0$, et on note que $\varphi' = -\sqrt{a}\varphi, \varphi'' = a\varphi$, on calcule :
   $$\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)' = \frac{f'(x)\varphi(x) - \varphi'(x)f(x)}{\varphi(x)^2} =: \frac{\omega(x)}{\varphi(x)^2}$$
   où on a posé $\omega(x) = f'(x)\varphi(x) - \varphi'(x)f(x)$. On calcule une dérivée de plus
   $$\omega'(x) = f''(x)\varphi(x) + f'(x)\varphi'(x) - \varphi''(x)f(x) - \varphi'(x)f'(x) = f''(x)\varphi(x) - a\varphi(x)f(x) \geq 0$$
   vu l'inégalité (1) sur f. Donc ω est croissante, donc on obtient $\omega(x) \leq \omega(y)$ pour $x \leq y$. Or par les deux questions précédentes f, f' tendent vers 0 en l'infini, donc ω aussi d'où en prenant $y \to \infty$: $\omega(x) \leq 0$ pour tout x. On déduit donc : $\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)' \leq 0$ donc $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ est décroissante, donc
   $$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \leq \frac{f(0)}{\varphi(0)} = 1.$$
   Ce qui est le résultat voulu $f(x) \leq \varphi(x) = f(0)e^{-x\sqrt{a}}$

Exercice 19 Montrer que pour S une partie fermé non-vide de E e.v.n. alors la fonction distance $d_S(x) := d(x, S) = \inf_{s\in S} ||x - s||$ est convexe si et seulement si S est convexe.

Exercice 20 Soient $g_1, ..., g_n$ des fonctions convexes C^1 définies sur $\mathbb{R}^m$ tel qu'il existe x_0 avec $g_i(x_0) < 0$ pour tout i. Soit la contrainte :$A = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i \in \{1, ..., n\}, g_i(x) \leq 0\}$. On rappelle que soit $x \in A$ avec $g_1(x) = ... = g_l(x) = 0$ (contraintes actives en x) et $g_{l+1}(x) < 0, ...g_n(x) < 0$, on a :

$$N_A(x) = \{\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \nabla g_i(x), \lambda_i \geq 0\}.$$

1. Soit $I \subset \{1, ..., n\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i \in I, g_i(x) \leq 0\}$ et $C = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i \in \{1, ..., n\} \setminus I, g_i(x) \leq 0\}$ et $x \in B \cap C$.
   En déduire que $N_{B\cap C}(x) = N_B(x) + N_C(x)$ et $T_{A\cap B}(c) = T_A(c) \cap T_B(c)$.
2. Si x minimise une fonction convexe f sur A. Montrer que x vérifie $\nabla f(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla g_i(x) = 0$ pour $\lambda_i \geq 0$ (et $\lambda_i = 0$ si la i-ème contrainte n'est pas active)
3. On considère le problème de minimiser $f(x, y) := (x - 3)^2 + (y - 2)^2$ sous les contraintes $x^2 + y^2 \leq 5, -x + 2y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$.
   Prouver qu'une solution existe qui n'est pas $(0, 0)$ et en déduire que la solution satisfait $f(x, y) < 13$.
   Trouver la solution (en se guidant graphiquement et en utilisant les conditions nécessaires). (Indication : Graphiquement, on se doute que la contrainte saturée au minimiseur va être $x^2 + y^2 = 5$)

Exercices d'entraînements

Exercice 21 Montrer que les C_i sont convexes et trouver les cônes normaux $N_{C_i}(a_j)$:

1. $C_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ en $a_1 = (0, 0)$ et en $a_2 = (0, 1)$.
   Solution :
   $C_5 = \overline{B(0, 1)}$ est la boule fermée pour la norme euclidienne donc convexe. $a_1 \in B(0, 1) = Int(\overline{B(0, 1)})$ donc d'après le cours $N_{C_5}(a_1) = \{0\}$.
   On pose $g(x) = x^2 + y^2 - 1$ qui est polynomiale avec $Hess(g(x)) = 2I_2$ définie positive, donc g est strictement convexe. On retrouve que $C_5 = g^{-1}(]-\infty, 0])$. En a_2 on a $g(a_2) = 1 + 0 - 1 = 0$ donc la contrainte est active. Par le théorème de calcul des cône normaux de convexes définies par contraintes, on obtient $N_{C_5}(a_2) = \mathbb{R}_+\{\nabla g(a_2)\} = \mathbb{R}_+(0, 2) = \mathbb{R}_+(0, 1)$
   On retrouve aussi le cas de a_1 en remarquant que $g(a_1) < 0$ donc la contrainte n'est pas active.
2. $C_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 1| + |y| \leq 1\} = \overline{B_{||.||_1}((1, 0), 1)}$ est une boule fermé donc convexe (pour la norme $||(x, y)||_1 = |x| + |y|$ cf TD 5).
   On veut calculer les cônes normaux en $a_1 = (0, 0)$, en $a_3 = (1, 0)$ et en $a_4 = (1/2, 1/2)$.
   Comme avant $Int(C_6) = B_{||.||_1}((1, 0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 1| + |y| < 1\}$ $a_3 \in Int(C_6)$ et donc d'après le cours $N_{C_6}(a_3) = \{0\}$.

   $$C_6 = \{g_1(x, y) = x-2+y \leq 0, g_2(x, y) = y-x \leq 0, g_3(x, y) = x-2-y \leq 0, g_4(x, y) = -y-x \leq 0\}$$

   Les g_i sont linéaires donc convexes C^1. On peut appliquer le théorème de calcul des cône normaux de convexes définies par contraintes.

En a_4 seule la contrainte g_2 est active, donc $N_{C_6}(a_4) = \mathbb{R}_+\{\nabla g_2(a_4)\} = \mathbb{R}_+(-1, 1)$.
En a_1 les contraintes g_2 et g_4 sont actives donc

$$N_{C_6}(a_1) = \mathbb{R}_+\{\nabla g_2(a_1)\} + \mathbb{R}_+\{\nabla g_4(a_1)\} = \mathbb{R}_+(-1, 1) + \mathbb{R}_+(-1, -1).$$

Exercice 22 On s'intéresse au problème de minimiser la fonction

$$f(x, y) = x^4 + x^2y^3 + 9x^2 + 8y^2 + 4$$

sur le pavé $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.

1. Prouver que f est strictement convexe sur A.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 2xy^3 + 18x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2x^2 + 16y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 + 2y^3 + 18, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6yx^2 + 16, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2$$

Comme

$$\begin{aligned} d^2f(x, y).((h, k), (h, k)) &= (12x^2 + 2y^3 + 18)h^2 + 6xy^2 2hk + (6yx^2 + 16)k^2 \\ &\geq (2y^3 + 18)h^2 + (6yx^2 + 16)k^2 + 6xy^2kh \\ &\geq (18 - 4)h^2 + (16 - 12)k^2 - 12(\frac{k^2}{4} + h^2) = 2h^2 + k^2 \\ &\geq h^2 + k^2 = \langle I_2(h, k), (h, k)\rangle \end{aligned}$$

pour $|y|, |x| < \sqrt[3]{2}$, de sorte qu'on a utilisé à l'avant-dernière ligne $|y^3|, |yx^2|, |xy^2| < 2$, et $2hk \leq (\frac{k^2}{4} + h^2)$.
On obtient donc $H(f)(x, y) \geq I_2$, donc par le cours f est strictement convexe sur l'ouvert $]-\sqrt[3]{2}, +\sqrt[3]{2}[^2 \supset A$

2. Montrer qu'il existe une solution unique du problème (Indication : rappeler pourquoi A est compact)
Par continuité, la fonction admet un minimum sur le compact A (boule fermé donc fermé borné en dimension finie), il est unique par convexité stricte.

3. On trouve la solution en cherchant les minima locaux. On remarque que $(0, 0)$ annule le gradient, c'est donc un point critique sur l'ouvert $Int(A)$, donc c'est l'unique minimum sur tout A. (par exemple on utilise le théorème de minimisation sur un convexe et $-\nabla f(0, 0) \in N_A(0) = \{0\}$ vu $0 \in Int(A)$).

Exercice 23 Lesquels parmi les fonctions suivantes sont convexes sur $\mathbb{R}^2$.

$$f_0(x, y) = x^2 + y^2 + x^4,\ f_1(x, y) = x^2 + y^2 + x^3,\ f_2(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy,\ f_3(x, y) = \cos(x + y),$$

$$f_4(x, y) = xe^y + ye^x,\ f_5(x, y) = |x + 1| + |y|,\ f_6(x, y) = (|x + 1| + |y|)^2.$$

On commence f_0, f_1, f_2 qui sont des polynômes donc de classe C^∞.

1. $Hf_0(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + 12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. qui est positive car ces valeurs propres $2 + 12x^2, 2 \geq 0$, donc f_0 est convexe sur $\mathbb{R}^2$.

2. $Hf_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2+6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, mais $Hf_1(-1,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, a un déterminant -8 négatif, donc $Hf_1(-1,0)$ n'est pas positive et donc f_1 n'est pas convexe sur $\mathbb{R}^2$.

3. $Hf_2(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$, mais $Hf_2(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, a un déterminant -16 négatif, donc $Hf_2(0,0)$ n'est pas positif et donc f_2 n'est pas convexe sur $\mathbb{R}^2$.

4. f_3 est périodique non constante, on se doute qu'elle ne va pas être convexe (mais ce n'est pas une preuve, on n'a pas vu de résultat de ce type en cours), elle est C^∞ par composition de cos et d'une fonction linéaire, $\nabla f_3(x,y) = (-sin(x+y), -\sin(x+y))$, donc $Hf_3(x,y) = \begin{pmatrix} -cos(x+y) & -cos(x+y) \\ -cos(x+y) & -cos(x+y) \end{pmatrix}$, par exemple $Hf_3(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, son déterminant $rt - s^2 = 0$ mais $r = -1 < 0$ donc $Hf_3(0,0)$ n'est pas positive, donc f_3 n'est pas convexe.

5. $\frac{\partial^2 f_4}{\partial x^2}(x,y) = ye^x$, $\frac{\partial^2 f_4}{\partial y^2}(x,y) = xe^y$, $\frac{\partial^2 f_4}{\partial x \partial y}(x,y) = e^x + e^y$.
$Hf_4(-1,1) = \begin{pmatrix} -e^{-1} & 2e^{-1} \\ 2e^{-1} & -e^{-1} \end{pmatrix}$. On a donc $rt - s^2 = e^{-1}(1-4) < 0$, donc $Hf_4(-1,1)$ n'est pas positive et f_4 n'est donc pas convexe sur $\mathbb{R}^2$.

6. f_5, f_6 ne sont pas même C^1 à cause des valeurs absolues, on ne peut pas dériver, on n'utilise une méthode proche de l'exercice 6.
$f_5(x,y) = ||(x,y) + (1,0)||_1$ vu $||(x,y)||_1 = |x| + |y|$, est la composée de la norme qui est convexe (par le cours), avec la fonction affine $A(x,y) = (x,y) + (1,0)$. On remarque que : $A(\lambda(x,y) + (1-\lambda)(x',y')) = \lambda(A(x,y)) + (1-\lambda)(A(x',y'))$
Donc, on obtient la convexité en utilisant la convexité de la norme pour $\lambda \in [0,1]$:
$$||A(\lambda(x,y)+(1-\lambda)(x',y'))|| = ||\lambda(A(x,y))+(1-\lambda)(A(x',y'))||_1 \leq \lambda||A(x,y)||_1+(1-\lambda)||A(x',y')||_1.$$

7. f_6 est la composée de f_5 convexe et $g(x) = x^2$ (une fonction croissante convexe) donc par l'exercice 6 : $f_6 = g \circ f_5$ est convexe. Concrètement, on peut (utiliser la convexité de f_5 :$f_5(\lambda(x,y) + (1-\lambda)(x',y') \leq \lambda f_5(x,y) + (1-\lambda) f_5(x',y')$ auquel on applique la croissance de g, puis on utilise la convexité de g) :
$$g \circ f_5(\lambda(x,y)+(1-\lambda)(x',y')) \leq g(\lambda f_5(x,y)+(1-\lambda)f_5(x',y')) \leq \lambda(g \circ f_5(x,y))+(1-\lambda)(g \circ f_5(x',y'))$$

Exercice 24 Lesquels parmi les fonctions suivantes sont convexes sur $[0,1]^2$:
$$g_1(x,y) = \frac{x^3+y^3}{6},\ g_2(x,y) = \frac{x^4+y^4}{12},\ g_3(x,y) = -\sqrt{2-(x^2+y^2)}$$
$$g_4(x,y) = \frac{x^2y^2}{2},\ g_5(x,y) = \cos(xy),\ g_6(x,y) = x^2+y^2+\frac{x^3}{6}.$$
ON commence g_1, g_2, g_4, g_6 qui sont des polynômes donc C^∞, on calcule donc les dérivées secondes.

1. $Hg_1(x,y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$. C'est positif sur $[0,1]^2$ et même $\mathbb{R}_+^2$ (car à valeur propre positive) mais pas sur un voisinage ouvert. Par contre, c'est le cas sur l'ouvert $]0,+\infty[^2$, où g_1 est donc convexe (on va étendre la convexité par continuité). Pour $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}_+^2$, on a $(x+1/n, y+1/n) \in]0,+\infty[^2$ donc la convexité s'écrit pour $\lambda \in [0,1]$:

$$g_1(\lambda(x+1/n, y+1/n)+(1-\lambda)(x'+1/n, y'+1/n)) \leq \lambda g(x+1/n, y+1/n)+(1-\lambda)g(x'+1/n, y'+1/n),$$

en passant à la limit $n \to \infty$ vu g continue, on obtient l'inégalité voulue :

$$g_1(\lambda(x,y) + (1-\lambda)(x',y')) \leq \lambda g(x,y) + (1-\lambda)g(x',y'),$$

2. g_2 est plus simple car $Hg_2(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$ est à valeurs propres positives sur $\mathbb{R}^2$ donc g_2 convexe sur $\mathbb{R}^2$ donc sur $[0,1]^2$.
3. $\nabla g_4(x,y) = (xy^2, yx^2)$ donc $Hg_4(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix}$.
   le déterminant $rt - s^2 = x^2y^2 - 4x^2y^2 \leq 0$ et en $(1/2, 1/2)$ vaut $-3/16 < 0$ donc $Hg_4(1/2,1/2)$ n'est pas positive, donc g_4 n'est pas convexe.
4. $Hg_6(x,y) = \begin{pmatrix} 2+x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. à des valeurs propres positives sur l'ouvert $]-2, +\infty[\times\mathbb{R}$ donc g_6 est convexe sur cet ouvert donc sur $[0,1]^2$.
5. g_5 est C^∞ comme composée de cosinus et d'un polynôme. $\nabla g_5(x,y) = (-ysin(xy), -x\sin(xy))$, donc
$$Hg_5(x,y) = \begin{pmatrix} -y^2cos(xy) & -\sin(xy) - xycos(xy) \\ -\sin(xy) - xycos(xy) & -x^2cos(xy) \end{pmatrix},$$
   $r = -y^2cos(xy)$ est négatif en $(1,1)$ ($cos(1) \in [0,1]$) donc $Hg_5(1,1)$ n'est pas positive donc g_5 n'est pas convexe.
6. Reste le cas le plus dur, celui de g_3 (On a l'intuition que g_3 est le graphe de la partie d'ordonnée négative d'une sphère de centre 0 et de rayon $\sqrt{2}$, ce qui semble convexe visuellement... Il serait facile de voir par composition que $-g_3$ est la compose d'une fonction concave croissante (la racine) et d'une fonction concave, qui est donc concave, on le montre par dérivation), Si x<1 ou y<1, on a $x^2 + y^2 < 2$ donc g_3 est a composée d'un polynôme à valeur strictement positif sur $[0,1]^2 \setminus \{(1,1)\} \subset B_{||.|||_2}(0, \sqrt{2})$ et de $x \mapsto -\sqrt{x}$ qui est C^∞ sur $]0, \infty[$ (mais pas dérivable en 0). Donc par composée g_3 est C^∞ sur $B_{||.|||_2}(0, \sqrt{2})$.
   On calcule les dérivées premières et secondes : $\nabla g_3(x,y) = (\frac{x}{\sqrt{2-(x^2+y^2)}}, \frac{y}{\sqrt{2-(x^2+y^2)}})$
$$\begin{aligned} Hg_3(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2-(x^2+y^2)}} + \frac{x^2}{(2-(x^2+y^2))^{3/2}} & \frac{xy}{(2-(x^2+y^2))^{3/2}} \\ \frac{xy}{(2-(x^2+y^2))^{3/2}} & \frac{1}{\sqrt{2-(x^2+y^2)}} + \frac{y^2}{(2-(x^2+y^2))^{3/2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2-y^2}{(2-(x^2+y^2))^{3/2}} & \frac{xy}{(2-(x^2+y^2))^{3/2}} \\ \frac{xy}{(2-(x^2+y^2))^{3/2}} & \frac{2-x^2}{(2-(x^2+y^2))^{3/2}} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$
   Son déterminant
$$rt - s^2 = ((2-x^2)(2-y^2) - x^2y^2)/(2-(x^2+y^2))^3 = (4 - 2x^2 - 2y^2)/(2-(x^2+y^2))^3 \geq 0$$
   est positif si $x^2 + y^2 < 2$ et $r \geq 0$ donc $Hg_3(x,y)$ est positive sur la boule ouverte euclidienne $B_{||.|||_2}(0, \sqrt{2})$. Par continuité comme pour g_1, g_3 est aussi convexe sur l'adhérence (la boule fermé) qui contient $[0,1]^2$, ceci conclut à g_3 convexe sur cet ensemble.