Université Claude Bernard — Mathématiques
L3 Topologie et Théorie de la Mesure — 2023-2024

Feuille d'exercices numéro 5

Intégration

Exercice 1 $(\star)$
(cf TD.)
ou Correction de 2021-2022 exercice 2
`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille5-matheco_2022-2023correction.pdf`
Attention : le 2 est FAUX tel quel et vrai si seulement si $\mu(A), \mu(B) < +\infty$ ou a, b de même signe. (Sinon, les deux termes de l'égalité ne sont pas définis)

Exercice 2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f_n(x) = \begin{cases} x - n & \text{si } x \geq n \\ 0 & \text{si } x < n \end{cases}$$

Montrer que

1. chaque f_n admet une intégrale sur $\mathbb{R}$ pour la mesure de Lebesgue. Est-elle intégrable ?
2. $f_n(x) \searrow 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
3. $\int f_n d\lambda$ ne converge pas vers $\int \lim\limits_{n\to\infty} f_n d\lambda$.

(cf TD)
ou Correction de 2021-2022 exercice 8 (Comme on voit que $\int f_n d\lambda = +\infty$ la réponse au 1. est que f_n n'est pas intégrable.)
`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille5-matheco_2022-2023correction.pdf`

Théorèmes de convergence

Exercice 3
(cf. TD)

Exercice 4
(cf. TD)

Exercice 5
(cf. TD)

Exercice 6 Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : [0, 1] \to [0, +\infty[$ par $f_n(x) = (n + 1)x^n$.

1. Déterminons la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   On a $f_n(1) = n + 1 \to +\infty$ et par croissance comparée $f_n(x) = (n + 1)x^n \to_{n\to\infty} 0$ pour $x < 1$.
   La limite simple est donc la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ +\infty & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

2. Déterminons la limite de la suite $\left(\int_0^1 f_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Par intégration directe, on a $\int_0^1 f_n(x)dx = [x^{n+1}]_0^1 = 1$. Donc on voit que cette suite converge vers 1.
3. On a $\int_0^1 f(x)dx = 0$ qui est donc différent de la limite. On ne peut pas intervertir la limite et l'intégrale car la suite n'est ni croissante, ni dominée.

Exercice 7 (cf. TD)

Exercice 8 Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x, on pose $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

1. Montrons que pour tout $x > 0$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est convergente.

   On a $e^{-nx} = (e^{-x})^n$ qui est le terme général d'une série géométrique (Attention la somme commence à 1, donc
$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}.$$
   De même, on a
$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2e^{-2nx} = 2e^{-2x}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2nx} = \frac{2e^{-2x}}{1-e^{-2x}}.$$
   Donc la différence des deux séries convergentes converge, et on obtient :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{2e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = \frac{e^{-x}(1+e^{-x})}{1-e^{-2x}} - \frac{2e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = \frac{e^{-x}(1-e^{-x})}{1-e^{-2x}} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}.$$

2. Comparer $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

   On peut calculer pour $n > 0$:
$$\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \left[\frac{e^{-nx}}{-n} + \frac{e^{-2nx}}{n}\right]_0^{\infty} = 0.$$
   Donc bien sûr $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = 0$. Or par changement de variable $u = e^{-x}$
$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 \frac{du}{1+u} = [\ln(1+u)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2) \neq 0 = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx.$$
   On ne peut donc par intervertir somme et intégrale. En effet, la série n'est pas à terme positif (l'intégrale est nulle ! et la fonction non nulle) et on va voir que la série de fonction intégrable ne converge par dans L^1. On a $f_n(x) = 0$ pour $1 = 2e^{-nx}$ soit $\ln(2) - nx = 0$ ou encore l'unique solution est $x_0 = \frac{\ln(2)}{n}$. Donc
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |f_n(x)|dx &= \int_0^{x_0}(2e^{-2nx} - e^{-nx})dx + \int_{x_0}^{+\infty}(e^{-nx} - 2e^{-2nx})dx \\ &= \left[\frac{e^{-nx}}{n} - \frac{e^{-2nx}}{n}\right]_0^{x_0} + \left[\frac{e^{-nx}}{-n} + \frac{e^{-2nx}}{n}\right]_{x_0}^{\infty} \\ &= 2\frac{e^{-nx_0}}{n} - 2\frac{e^{-2nx_0}}{n} = 2\frac{e^{-\ln(2)}}{n} - 2\frac{e^{-2\ln(2)}}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}.\end{aligned}$$

Et par une série de Riemann, on a $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}|f_n(x)|dx = +\infty$ donc le théorème d'interversion série-intégrale ne s'applique pas !

Exercice 9 (cf. TD)

Intégrales à paramètres

Exercice 10

(cf TD.)
ou Correction de 2021-2022 exercice 1
`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille6-matheco_2022-2023correction.pdf`

Exercice 11

(cf TD.)
ou Correction de 2021-2022 exercice 2
`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille6-matheco_2022-2023correction.pdf`

Exercice 12

(cf TD.)
ou Correction de 2021-2022 exercice 3
`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille6-matheco_2022-2023correction.pdf`

Exercice 13 On pose $F(x) = \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t}dt$.

1. Montrer que F est bien définie et continue sur $]0, \infty[$
2. Montrer que F est continûment dérivable sur $]0, \infty[$.
3. Montrer que F est aussi bien définie en 0 comme intégrale de Riemann semi-convergente :$F(0) = \lim_{K\to\infty}\int_0^K \frac{\sin(t)}{t}dt$. (Indication : utiliser une intégration par partie).
4. Montrer que F est continue en 0. (Indication : il faut utiliser une méthode standard pour les intégrales semi-convergentes. On pourra décomposer $F(x) = F_0(x) + F_1(x)$ pour les intégrales sur $]0, 1],]1, +\infty[$, et utiliser une intégration par partie $v'(t) = \sin(t), u(t) = e^{-tx}/t$ sur F_1 pour obtenir la formule alternative suivante :

$$F_0(x) = \int_0^1 e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t}dt, \qquad F_1(x) = \int_1^\infty e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t}dt = e^{-x}\cos(1) + \int_1^\infty (xt+1)e^{-tx}\frac{\cos(t)}{t^2}dt.)$$

(cf TD. pour les questions 1 et 2)
ou Correction de 2021-2022 exercice 4
`https://math.univ-lyon1.fr/parcours_matheco/lib/exe/fetch.php?media=programmes_ue_l3:topologie-mesure:feuille6-matheco_2022-2023correction.pdf`

3. Par intégration par partie avec $v'(t) = \sin(t), v(t) = -\cos(t), u(t) = 1/t, u'(t) = -1/t^2$, on a

$$\int_1^K \frac{\sin(t)}{t}dt = [-\frac{\cos(t)}{t}]_1^K + \int_1^K \frac{\cos(t)}{t^2}dt$$

Donc en utilisant l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ pour montrer que le dernier terme converge, on obtient la limite :

$$F(0) = \lim_{K\to\infty} \int_0^K \frac{\sin(t)}{t}dt = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}dt + \cos(1) + \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt.$$

4. En suivant l'indication, par la même intégration par partie, on obtient :

$$F(x) = F_0(x) + F_1(x) = \int_0^1 e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t}dt + e^{-x}\cos(1) + \int_1^{\infty} (xt+1)e^{-tx}\frac{\cos(t)}{t^2}dt$$

On montre la continuité de F_0 et F_1 séparément comme intégrales à paramètres.

On pose $f_0(t,x) = e^{-tx}\frac{\sin(t)}{t}$ qui est continue sur $]0,1] \times [0,+\infty[$ par produit de fonctions usuelles, dominée par 1, intégrable sur $]0,1]$, donc par théorème de continuité avec condition de domination F_0 est continue sur $[0,+\infty[$, en particulier en 0.

On pose $f_1(t,x) = (xt+1)e^{-tx}\frac{\cos(t)}{t^2}$ qui est continue sur $[1,+\infty[\times[0,+\infty[$ par produit de fonctions usuelles, dominée par $|f_1(t,x)| \leq \frac{M}{t^2} = g(t)$.

En effet, $h(u) = (u+1)e^{-u}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et tendant vers 0 en $+\infty$ par croissance comparée, donc est bornée par M. On peut aussi montrer que h est décroissante sur $[0,+\infty[$ et donc borné par sa valeur en 0 à savoir $M = 1$.

Or g est intégrable sur $[1,+\infty[$ et ne dépend pas de x, donc par théorème de continuité avec condition de domination

$$F_1(x) - e^{-x}\cos(1) = \int_1^{\infty} (xt+1)e^{-tx}\frac{\cos(t)}{t^2}dt$$

est continue sur $[0,+\infty[$. Par somme avec F_0 et l'exponentielle qui est aussi continue, on déduit que F est continue sur $[0,+\infty[$.

Exercice 14 (cf TD.)

Exercices supplémentaires

Exercice 15 Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{e^x}{1+x^n}dx$, $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}dx$ et $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{|x|}{n})dx$.

1/ On pose $f_n(x) = \frac{e^x}{1+x^n}$, on déduit $f_n(x) \to e^x$ pour $x \in [0,1[$. On a la domination $|f_n(x)| \leq e$ par une constante donc une fonction Lebesgue-intégrable sur $[0,1[$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée en réécrivant l'intégrale comme intégrale de Lebesgue :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{e^x}{1+x^n}dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1[} \frac{e^x}{1+x^n}d\lambda(x) = \int_{[0,1[} e^x d\lambda(x) = \int_0^1 e^x dx = e - 1$$

2/ On pose $g_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+x}$. Pour $x > 0$, on a $g_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+x} \to 0$. On a la domination $|g_n(x)| \leq 1$ par une constante donc une fonction Lebesgue-intégrable sur $]0,1]$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée en réécrivant l'intégrale comme intégrale de Lebesgue :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}dx = \lim_{n\to\infty} \int_{]0,1]} \frac{e^{-nx}}{1+x}d\lambda(x) = \int_{]0,1]} 0 d\lambda(x) = 0.$$

3/ On pose $h_n(x) = \exp(-\frac{|x|}{n})$. On a la limite simple $h_n(x) \to 1_{\{0\}}(x)$. Or pour $n \geq 1$, on a la domination $|h_n(x)| \leq \exp(-|x|) = h_1(x)$. Or h_1 est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(x)dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 2$. Donc par le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{|x|}{n})dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{\{0\}}(x)dx = 0.$$

Exercice 16

Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$ et $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}dx$.

1/ On pose $f_n(x) = 1_{[0,n]}(x)\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ on a la limite simple

$$f_n(x) = 1_{[0,n]}(x)\exp(n\ln(1 - \frac{x}{n})) \to_{n\to\infty} \exp(-x).$$

Par concavité du log, on a $\ln(1 - \frac{x}{n}) \leq -\frac{x}{n}$ (borne par la tangente en 1), on obtient donc la domination

$$|f_n(x)| = 1_{[0,n]}(x)\exp(n\ln(1 - \frac{x}{n})) \leq 1_{[0,n]}(x)\exp(-\frac{x}{n}n) \leq \exp(-x) = g(x).$$

Or g est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc par le TCD, on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,+\infty[} f_n(x)d\lambda(x) = \int_{[0,+\infty[} e^{-x}d\lambda(x) = 1.$$

2/ On pose $g_n(x) = 1_{[0,n]}(x)\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$ on a la limite simple

$$g_n(x) = 1_{[0,n]}(x)\exp(n\ln(1 + \frac{x}{n}))e^{-2x} \to_{n\to\infty} \exp(x)e^{-2x} = e^{-x}.$$

Par concavité du log, on a $\ln(1 + \frac{x}{n}) \leq \frac{x}{n}$ (borne par la tangente en 1), on obtient donc la domination

$$|g_n(x)| = 1_{[0,n]}(x)\exp(n\ln(1 + \frac{x}{n}))e^{-2x} \leq 1_{[0,n]}(x)\exp(\frac{x}{n}n)e^{-2x} \leq \exp(x)e^{-2x} = g(x).$$

Or g est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc par le TCD, on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,+\infty[} g_n(x)d\lambda(x) = \int_{[0,+\infty[} e^{-x}d\lambda(x) = 1.$$

Exercice 17 Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x}(\sin(x))^n dx$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^3} dx$.

1/ On pose $f_n(x) = e^{-x}(\sin(x))^n \to_{n\to\infty} 0$ pour tout $x \notin \mathbb{Z}\pi$. Or $\lambda(\mathbb{Z}\pi) = 0$ (car $\mathbb{Z}\pi$ est dénombrable) donc f_n converge vers 0 λ-p.p.

De plus, on a la domination $|f_n(x)| \leq e^{-x} = g(x)$ par g intégrable sur $[0, +\infty[$ donc par le théorème de convergence dominé, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x}(\sin(x))^n dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,+\infty[} e^{-x}(\sin(x))^n d\lambda(x) = \int_{[0,+\infty[} 0d\lambda(x) = 0.$$

2/On pose, pour $x \geq 1$, $g_n(x) = \frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^3} \sim_{n\to+\infty} \frac{n\frac{x}{n}}{x^3} = \frac{1}{x^2}$.

De plus, on rappelle que $|sin(y)| \leq |y|$ (cf. inégalité de convexité du TD 2), donc on obtient la domination :

$$\left|\frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^3}\right| \leq \frac{n\frac{x}{n}}{x^3} = \frac{1}{x^2} = g(x).$$

Or, comme intégrale de Riemann ($\alpha = 2 > 1$), on sait que g est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc par le théorème de convergence dominé, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^3}\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^3}\, d\lambda(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, d\lambda(x) = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = 1.$$

Exercice 18 Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit une fonction $f_n : [0,1] \to [0, +\infty[$ par $f_n(x) = n(1-x)^n \sin^2(nx)$.

1. Déterminons la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On notera cette limite simple f.
   On a $f_n(0) = 0 \to 0$ et pour $x > 0$ on a $|f_n(x)| \leq n(1-x)^n \to_{n\to\infty} 0$ par croissance comparée. Donc la limite simple est 0.
2. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on fait le changement de variable $y = nx$ et on obtient
   $$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^n \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n \sin^2(y)dy.$$
3. Comme la fonction $g(x) = e^{-x}$ a pour dérivée seconde elle-même qui est positive, f est convexe. On vérifie que pour tout $x \geq 0$, on a $1 - x \leq e^{-x}$ vu que $y = 1 - x$ est la tangente à g en 0.
4. En bornant aussi le sinus par 1, on en déduit la domination :
   $$\left|1_{[0,n]}(y)\left(1 - \frac{y}{n}\right)^n \sin^2(y)\right| \leq (e^{-y/n})^n = e^{-y}$$
   et cette fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$, Donc par le théorème la suite
   $$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_{[0,+\infty[} 1_{[0,n]}(y)\left(1 - \frac{y}{n}\right)^n \sin^2(y)d\lambda(y) \to_{n\to\infty} \int_{[0,+\infty[} e^{-y}\sin^2(y)d\lambda(y).$$
5. On en déduit que
   $$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_{[0,+\infty[} e^{-y}\sin^2(y)d\lambda(y) \neq \int_0^1 f(x)dx = 0.$$
   Car la fonction positive $e^{-y}\sin^2(y)$ ne pourrait être d'intégrale nulle que si elle était nulle presque partout. Or ce n'est pas le cas puisqu'elle s'annule comme le sinus pour $y \in \mathbb{N}\pi$ qui est dénombrable donc de mesure nulle.

6. On a déjà calculé $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-y}\sin^2(y)dy$.
Si on veut une valeur explicite , on peut utiliser la formule d'Euler :

$$\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin^2(y)dy = -\int_0^{+\infty} e^{-y}\frac{e^{2iy}+e^{-2iy}-2}{4}dy = \frac{-1}{4}\left[\frac{e^{-y}e^{2iy}}{2i-1} - \frac{e^{-y}e^{-2iy}}{2i+1} + 2e^{-y}\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{5}.$$

Exercice 19 On pose $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2}\,dx$ pour $\alpha \geq 0$.

1. Montrons que $0 \leq I(\alpha) < +\infty$ pour tout $\alpha \geq 0$.
On pose $i(\alpha,x) = \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2}$. i est clairement continue en $x=0$ par quotient de fraction usuelle. On a $i(0,x)=0$ qui est bien intégrable donc $I(0)$ existe et vaut 0. Pour $\alpha>0$, on a l'équivalent $i(\alpha,x)\simeq\frac{2\ln(x)}{x^2}$ donc $x^{3/2}i(\alpha,x)\simeq\frac{2\ln(x)}{\sqrt{x}}\to_{x\to\infty} 0$ donc $i(\alpha,x)=o(\frac{1}{x^{3/2}})$ en $+\infty$ et $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{3/2}}dx < +\infty$ (intégrale de Riemann convergente $\alpha=3/2>1$). donc par comparaison i est intégrable en $+\infty$, donc sur $[0,+\infty[$ par ce qui précède, on en déduit $I(\alpha)<+\infty$
Enfin $i(\alpha,x)\geq i(0,x)=0$ car i est une fonction croissante de α comme ln d'où en intégrant, on obtient $0\leq I(\alpha)$.
2. Montrons que la fonction $I:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimons $I'(\alpha)$, pour $\alpha>0$, sous la forme d'une intégrale.
i est C^1 sur $]0,+\infty[^2$ par quotient à dénominateur non nulle de fonctions usuelles et
$$\frac{\partial i}{\partial\alpha} = \frac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)}.$$

On va appliquer le théorème de dérivation successive pour $k=1$ dérivée sur l'ouvert $U = \left]\frac{1}{a}, M\right[\times]0,+\infty[$
Sur U, on a la domination $1+\alpha x^2\geq x^2/a$ d'où
$$\left|\frac{\partial i}{\partial\alpha}\right| \leq \frac{a}{1+x^2} = g(x).$$
et par croissance (et positivité) de i en α on a aussi $|i(\alpha,x)|\leq i(M,x)=h(x)$. On a vu au 1 que h et g sont intégrable, on peut donc appliquer le le théorème de dérivation successive sur U pour conclure que I est C^1 sur $\left]\frac{1}{a}, M\right[$ avec dérivée :
$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)}\,dx.$$

On $a, M>0$ sont arbitraires, on en déduit que par localité du caractère C^1 que I est C^1 sur $]0,+\infty[$.

3. Montrons que I est continue en 0. La domination sur i de la question précédente s'applique sur $V=[0,M[\times]0,+\infty[$, comme i est continue sur $[0,+\infty[^2$ donc sur V, on en déduit qu'on peut appliquer le théorème de continuité avec condition de domination (cas $k=0$ du théorème de dérivation successive.) On en déduit que I est continue sur $[0,M[$ et donc en particulier en 0.

4. (a) Soit $\alpha > 0, \alpha \neq 1$. Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)}$ en éléments simples.

En général, du cours de $L1$, on se souvient que pour $\alpha \neq 1$, la forme de la décomposition en élément simple est $\dfrac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)} = \dfrac{a+bx}{1+x^2} + \dfrac{c+dx}{1+\alpha x^2}$. Mais ici, on voit qu'en prenant $b = d = 0, c = -a$, on va trouver une solution en mettant le second membre au même dénominateur :

$$\frac{a}{1+x^2} - \frac{a}{1+\alpha x^2} = a\frac{x^2(\alpha-1)}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)},$$

ce qui donne $a = \frac{1}{\alpha-1}$.

(b) Déduisons la valeur de $I'(\alpha)$ pour $\alpha > 0$ et d'abord $\alpha \neq 1$.

On a en appliquant 4(a) à 2) :

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(\alpha-1)} - \frac{1}{(1+\alpha x^2)(\alpha-1)}\,dx = \left[\frac{\arctan(x)}{(\alpha-1)} - \frac{\arctan(\sqrt{\alpha}x)}{\sqrt{\alpha}(\alpha-1)}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{(\alpha-1)} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}(\alpha-1)}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{\alpha}-1}{(\alpha-1)\sqrt{\alpha}}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha}+1)} \end{aligned}$$

Comme cette dernière formule est continue en α même en 1, comme I', on en déduit qu'en prolongeant par continuité, c'est la formule pour tout $\alpha > 0$ (soit $I'(1) = \frac{\pi}{4}$).

(c) Calculons $I(\alpha)$ pour $\alpha \geq 0$. On a $I'(\alpha) = \pi\frac{u'}{u}$ avec $u = 1+\sqrt{\alpha}$, donc on déduit les primitives $I(\alpha) = C + \pi\ln(1+\sqrt{\alpha})$. Or on a déjà vu $I(0) = 0$ donc on trouve la conclusion $C = 0$, d'où

$$I(\alpha) = \pi\ln(1+\sqrt{\alpha}).$$